Władysław Orlicz (1903–1990)

1. Biografia Orlicza

Władysław Roman Orlicz urodził się 24 maja 1903 roku w Okocimiu. Rodzice, Franciszek Orlicz (1868-1907) i Maria Orlicz (1872-1952) z domu Rossknecht, mieli pięciu synów: Kazimierza (1899-1945), Tadeusza (1900-1988), Władysława (1903-1990), Zbigniewa (1905-1920) i Michała (1906-1978). Tadeusz, Władysław i Michał byli profesorami, a Kazimierz i Zbigniew zginęli w czasie wojen światowych.

Ojciec Orlicza był buchalterem w okocimskim browarze, a matka córką dyrektora browaru, Michała Rossknechta (1840-1917). Franciszek Orlicz wcześnie i niespodziewanie osierocił swoich synów, ulegając przypadkowemu śmiertelnemu zatruciu rybą w 1907 roku. Matka chłopców wyszła później ponownie za mąż za Stefana Patockiego (1875-1931), przyjmując nazwisko Orlicz-Patocka.

Rodzina Orliczów dość często zmieniała miejsca pobytu, co wiązało się z koniecznością zmiany szkół. Władysław uczył się więc w szkole ćwiczeń męskiego seminarium nauczycielskiego w Tarnowie (1908-1913: klasy I-IV), w morawskim Znaimiu, w szkole realnej w Tarnowie (1913-1919; klasy I-VI) i w Państwowej II Szkole Realnej we Lwowie (1919-1920; VII klasa). Uczył się bardzo dobrze, szczególnie w starszych klasach, co stwierdzają jego świadectwa szkolne. Orlicz w pierwszej klasie miał ocenę dobrą z matematyki, ale już w siódmej klasie otrzymał ocenę bardzo dobrą. 10 czerwca 1920 roku uzyskał maturę w Państwowej II Szkole Realnej we Lwowie. Zdał ją z odznaczeniem.

W roku 1920 Orlicz zgłosił się ochotniczo do Armii Polskiej, aby czynnie uczestniczyć w wojnie z Rosją sowiecką. Szczęśliwie uniknął niebezpieczeństw ,,ogniowej próby", gdyż zmagania wojenne zakończyły się przed skierowaniem jednostki do działań bojowych.

Studia rozpoczął Orlicz w 1920 roku w Szkole Politechnicznej we Lwowie (na Wydziale Mechanicznym i Oddziale Maszynowym), gdyż ukończył szkolę realną, a nie klasyczną (tzn. nie zdawał

łaciny i greki) co dawało prawo wstępu jedynie na studia politechniczne. Jednak z powodu kłopotów z geometrią wykreślną (natura nie obdarzyła go wyobraźnią przestrzenną) przeniósł się po roku na Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie na Wydział Filozoficzny, aby studiować matematykę. Otrzymał indeks nr 7012 w języku łacińskim, a następnie książkę legitymacyjną (takim mianem określano indeks, ale już w języku polskim) z numerem 11372. Uczyli go w tym czasie (1921–1926) mistrzowie tej rangi co Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Antoni Łomnicki, Stanisław Ruziewicz, Eustachy Żyliński, Stanisław Loria czy Kazimierz Ajdukiewicz, prowadzący wykłady z zakresu logiki i metodologii nauk.

W latach 1926–1928 ponownie studiował na Politechnice Lwowskiej na Wydziale Ogólnym i Oddziale Matematycznym. Tutaj z kolei uczyli go: Stefan Kaczmarz, Antoni Łomnicki, Władysław Nikliborc i Włodzimierz Stożek.

Orlicz pracę rozpoczął już w roku 1923 jako demonstrator przy Katedrze Matematyki Wydziału Filozoficznego Uniwersytetu Lwowskiego. Studia uniwersyteckie zakończył w roku akademickim 1925/26 i już od 1 sierpnia 1925 roku był młodszym asystentem przy I Katedrze Matematki Uniwersytetu Jana Kazimierza. Nie był to stały etat, ale umowa o pracę na jeden rok, sytematycznie odnawiana.

W 1926 roku Orlicz opublikował w Tohoku Mathematical Journal pierwszą pracę naukową z zakresu teorii sumowalności. Rozprawę doktorską pt. *Z teorji szeregów ortogonalnych* obronił 30 lipca 1928 roku. Formalnym promotorem był Eustachy Żyliński, ale faktycznym Hugo Steinhaus, najwybitniejszy wówczas polski specjalista z tematyki szeregów ortogonalnych. Potwierdzeniem tego może być fakt, że Steinhaus i Orlicz uprawiali wspólną problematykę (szeregi ortogonalne) a Żyliński zajmował się algebrą i logiką, jak również listy Orlicza do Steinhausa z tego okresu dotyczące szeregów ortogonalnych. Orlicz jednak nigdy nie wyjaśnił, dlaczego formalnym promotorem dysertacji nie był ani Hugo Steinhaus ani Stefan Banach.

12 lipca 1928 roku Władysław Orlicz zawarł związek małżeński z Zofią Krzysikówną.

Pani Zofia urodziła się 26 września 1898 w bośniackiej miejscowości Foča. Miała dwóch braci: Stanisława i Franciszka. Podczas wojny polsko-bolszewickiej w 1920 roku, jako ochotniczka, otrzymała przydział obsługi punktu żywnościowego na Dworcu Podzamcza we Lwowie, skąd odchodziły pociągi wojskowe Lwów-Warszawa-Lwów.

Studia na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie ukończyła jako magister fizyki i matematyki w 1925 r. Przed uzyskaniem magisterium była asystentką przy Katedrze Fizyki Uniwersytetu Jana Kazimierza, a od 1925 roku do wybuchu wojny radziecko-niemieckiej w 1941 roku nauczycielką w Żeńskim Gimnazjum Notre Dame we Lwowie. Od lipca 1941 rozpoczęła pracę w tajnym nauczaniu. Była sekretarką Stefana Balickiego, kuratora na okręg lwowski i przedstawiciela Rządu RP w Londynie. Równocześnie pełniła służbę w Armii Krajowej. W latach 1941-1944 pracowała w łączności Armii Krajowej we Lwowie, najpierw jako łączniczka, a następnie jako zastępca szefa łączności Rafała Kiernickiego OFM Conv, później biskupa pomocniczego we Lwowie.

Zofia Orlicz, pseudonim *Krystyna* była osobą angażującą się w sprawy narodowe. Ratowała polskich Żydów. Pracowała w Instytucie Weigla oddając swoją krew. Po wojnie działała w AK-WiN. Była poszukiwana przez władze sowieckie oraz przez ówczesny Urząd Bezpieczeństwa, dlatego małżonkowie repatriowali się osobno. Władysław osiadł w Poznaniu, a jego małżonka ukrywała się pod przybranymi nazwiskami Zofia Wyspiańska i Zofia Majewska, najpierw w Krakowie a następnie w klasztorze na Górze św. Anny. Została aresztowana 22 marca 1948 roku przez oficera UB przybyłego w habicie franciszkańskim! Po śledztwie i torturach w roku 1948 władze komunistyczne skazały ją wyrokiem Wojskowego Sądu Rejonowego we Wrocławiu z dnia 21 stycznia 1949 roku na 12 lat więzienia za „szkodliwą działalność na rzecz państwa polskiego”. Była więziona we Wrocławiu, a następnie w Fordonie nad Wisłą. Prof. Orlicz interweniował u prezydenta Bieruta w sprawie złagodzena wyroku i skrócenia kary. W staraniach tych pomagał mu brat żony Franciszek Krzysik oraz piszący pisma popierające: prof. Leopold Infeld, prof. S. Mazur, prof. S. Kulczyński, prof. K. Ajdukiewicz, prof. E. Maleczyńska, doc. Kokoszyńska-Lutmanowa, prof. B. Knaster i dr S. Balicki. Interwencje okazały się jednak nieskuteczne, mimo tego, że w 1952 roku Orlicz został laureatem Nagrody Państwowej. Dopiero śmierć Stalina i pewne złagodzenie kursu politycznego umożliwiły Pani Zofii nieco wcześniejszy powrót z więzienia.

Po 5 latach więzienia została uwolniona 2 maja 1953 roku ze względów zdrowotnych, jednak z zakazem pracy pedagogicznej. W wyniku kalectwa, jakie było wynikiem przesłuchań i następnie pobytu w więzieniu, otrzymywała rentę inwalidzką. 22 września 1953 roku Rada Państwa PRL

zawiesiła wykonanie reszty wyroku. Po rewizji procesu 11 grudnia 1962 roku Zofia została uniewinniona i zrehabilitowana przez Sąd Wojewódzki we Wrocławiu. W uznaniu zasług nadano jej Order Virtuti Militari, Krzyż Walecznych i w 1999 roku – Krzyż Oficerski Orderu Odrodzenia Polski.
Pani Zofia budziła sympatię i szacunek wszystkich, którzy ją znali. Żyła 101 lat (!). Jeszcze w wieku 100 lat paliła papierosy, żartowała i pamiętała wiele faktów z jej i Profesora Orlicza życia. Żartowała mówiąc np.: *zdopingowałam go do szybkiego zrobienia doktoratu, to bowiem był mój warunek zawarcia małżeństwa.* Była też dość sprawna fizycznie.
Po raz ostatni widziałem ją we wrześniu lub październiku 1999 roku. Była już bardzo niesprawna. Stwierdziła na zakończenie rozmowy, że widzimy sie po raz ostatni. Miała dobre przeczucie, gdyż faktycznie widzieliśmy się po raz ostatni. Zmarła 5 listopada 1999 roku w Poznaniu. Smutno mi było, kiedy dowiedziałem się o jej śmierci, gdyż odwiedzałem ją kilka razy w roku przez ostatnie 9 lat jej życia. Wspominała czasy lwowskie i poznańskie oraz interesowała się zmianami w Polsce. Martwiła ją korupcja i ubożenie społeczeństwa, a także prostytutki na ulicy Libelta w Poznaniu, gdzie zamieszkiwała pod numerem 22 m. 4 do końca swojego życia.

Miałem okazję być w maju 2002 we Lwowie na międzynarodowej konferencji *Functional Analysis and its Applications* dedykowanej 110-ej rocznicy urodzin Stefana Banacha (28-31 maja 2002). W przewodniku po Lwowie z 2000 roku znalazłem informację:

Na ulicy Krzywonosa w secesyjnej kamienicy pod nr 27 mieszkał w latach 30 XX w. znany polski matematyk Władysław Orlicz (1903-1990).

Natomiast z innych zapisów wiem, że Orlicz mieszkał najpierw na ulicy Nabielaka 3 (w okresie 1928-1930), później na Teatyńskiej 27 (w okresie 1931-1932) i, z żoną, na ulicy Kopcowej 3 (obecnie Kotljarewskiego 3). Spotkałem też tutaj osobę, która we Lwowie słuchała wykładu Orlicza z algebry, wygłaszanego w zastępstwie za Żylińskiego. Ta osoba to W. Lance (W. E. Lyantse), emerytowany profesor Zakładu Analizy Matematycznej i Funkcjonalnej Państwowego Uniwersytetu Iwana Franki we Lwowie, który tak napisał do mnie 27 czerwca 2002 roku:

Profesora Orlicza znałem bardzo krótko. Zaledwie pół roku słuchałem jego wykładów z Algebry (pierwszą połowę kursu wykładał prof. Żyliński). To było w roku 1941. Po wojnie parę razy widziałem prof. Orlicza na niektórych konferencjach. Ale były to spotkania mimowolne. Algebrę prof. Orlicz wykładał według niemieckiego podręcznika Perrona (w tych czasach wybór podręczników był niewielki). Nieorginalne wykłady zwykłem zamieniać pracą w bibliotece. Ale uczęszczałem na wszystkie bez wyjątku wykłady Orlicza. Był w tych wykładach jakiś niezwykły urok, piękno i mądrość. Wiele mówi to, że Orlicz, przebywając w Getyndze, poświęcał swój czas, przede wszystkim na studia nowoczesnej fizyki, u jej źródeł. To świadczy o żądzy szerokiej naukowej kultury. Taką właśnie kulturą promieniował on na wykładach, których słuchałem.

Okres od 11 grudnia 1928 do grudnia 1930 spędził Orlicz, z przerwami, w znanym niemieckim ośrodku naukowym w Getyndze. Udał się tam celem studiowania, o dziwo nie matematyki, ale mechaniki teoretycznej. Wyjechał dzięki stypendium uzyskanym w Ministerstwie Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego. Otrzymał też bezpłatny paszport i 8.000 ówczesnych złotych.

W Niemczech zetknął się z wieloma znakomitościami w tym z: E. Landau'em, R. Courantem, H. Bohrem, M. Bornem. Nawiązał też kontakt z Gotfriedem Köthe. Istnieje zaświadczenie niemieckie z 28 lipca 1930 roku wydane przez szefa Instytutu Fizyki Teoretycznej w Getyndze Prof. Maxa Borna (przypomnijmy, że Max Born otrzymał Nagrodę Nobla z Fizyki w 1954 roku jak również fakt, że urodził się we Wrocławiu) o aktywności Orlicza w Getyndze na zajęciach z fizyki (por. [M04], zdj. 19).

Można odnieść wrażenie, że Orlicz uczestniczył w życiu fizyków bardziej niż w życiu matematyków. Tak jednak nie było, gdyż to w Getyndze właśnie rozpoczął, początkowo we współpracy z Wilhelmem Z. Birnbaumem (również ze Lwowa), a później samodzielnie, badanie przestrzeni funkcyjnych, nazwanych po latach *przestrzeniami Orlicza.* Praca napisana wspólnie z Birnbaumem [9] w 1930 roku zawiera wiele ważnych obserwacji, przydatnych później dla przestrzeni Orlicza, ale jej głównym celem było uogólnienie twierdzenia Landaua. Można zobaczyć jak Orlicz i Birnbaum pracowali nad swoją pracą (por. [M04], zdj. 20). **Przestrzenie Orlicza z punktu widzenia analizy funkcjonalnej tzn. jako przestrzenie pojawiły się po raz pierwszy w pracy Orlicza [13] z 1932 roku**, z dodatkowym warunkiem na funkcję tzw. warunkiem Δ_2, a w pracy [27] z 1936 roku w pełnej ogólności tzn. bez tego dodatkowego założenia.

O atmosferze życia w Getyndze jak i o sytuacji naukowej można przeczytać w listach Orlicza do żony. Załączam tutaj wybrane uwagi Orlicza z tych listów.

– Przyjazd do Getyngi (list do Zofii z 17 grudnia 1928 roku):

Wszyscy mają tutaj paskudne przyzwyczajenie i pytają się odrazu co się umie. Dotychczas rozmowa z Bornem wypadła nieco blado. Pytał się co robi Loria, trudno mi się było wyjęzyczyć, powiedzialem mu ogólnie, że jest ogromnie zajęty rozbudową Instytutu. Później pytał się jeszcze czy znam, te rzeczy które obecnie wykłada. Powiedziałem, że nie. Polecił mi, w sprawie literatury zwrócić się do dr. Heitlera. Załatwię to jeszcze dzisiaj.

– Sylwester 1928/1929 (list do Zofii z 1 stycznia 1929 roku):

Kupiliśmy sobie na spółkę z Burzyńskim flaszkę szampana i trochę pierników by godnie uczcić Sylwestra i zasiedliśmy o 10.30 i popijając, słuchając radia i grając w szachy przesiedzieliśmy do 12-tej. Potem wyszliśmy jeszcze trochę na miasto. Wszędzie było pełno młokosów, pijaków i niewiast, częściowo podejrzanej jakości. Krzyki i hałas. O 1-ej wywietrzało już wino z głowy i Władek zasnął smacznie w swoim łóżku. Dzisiaj zbudziliśmy się o 11.30.

– Getynga 1929 (list do Zofii z 4 grudnia 1929 roku):

W poniedziałek było uroczyste ,,poświęcenie" nowego Instytutu Matematycznego. Brałem w tem udział. Rano uroczystości o dość familyjnym chrakterze z Hilbertem etc. (...). We wtorek było uroczyste posiedzenie Tow. Matem. mówił Weyl i Kárman. Było wielu zamiejscowych i zagranicznych gości (...). Opracowanie wykładu o którym pisałem absorbuje więcej czasu niż sam myślałem. Jedyna korzyść to że uczę się trochę niemczyzny i fizyki. Ale to drogo jest okupione czasem. Wykładami zbytnio się przejmuję - lepiej się trochę wyspać niż później chodzić cały dzień z wymęczoną miną. Boję się jednak pomyśleć co to będzie po powrocie do Lwowa, gdy trzeba będzie zarabiać na życie.

– Getynga początek 1930 (list do Zofii):

Razem z Birnbaumem wykańczam tzw. ,,pracę". Może znajdzie się jakieś czasopismo na świecie, które wydrukuje tę kompilację. Ale ja mam poważne wątpliwości.

PS. Byłbym zapomniał o ważnej rzeczy. Poradź mi co zrobić by uratować moją pensję za sierpień przed Steinhausem. Mój urlop kończy się defacto 1-go sierpnia. Z drugiej strony nie będę 1-go we Lwowie i powinienem napisać do Steinhausa o tem. On przypuszczam zgodzi się na to, ale zechce zapewne wstrzymać pobory.

– Getynga 1930 (list do Zofii z 4 czerwca 1930 roku):

(...). Głupie jest życie, gdy się nie wie czego się chce i czego nam właściwie brak. Zapewne mój stan jest tylko wpływem popsutego żołądka. Patrzę wstecz na wszystkie głupstwa które w życiu robiłem, z odrazą na tzw. prace matematyczne. Głupie zadrukowane kartki papieru, nikomu na nic niepotrzebne. Świadomość marnowania pieniędzy państwowych przez dwa lata męczy mnie jak zmora. Ja wiem dobrze, że nie potrafię się już zdobyć na żaden wysiłek. Najwięcej dręczy mnie nie wysłane sprawozdanie do Ministerstwa. Szkoda tych 1500 zł, które przepadły. Obecnie już ich nie przyślą.

– Getynga 1930 (list do Zofii z 6 października 1930 roku):

Kochana Zosiu! A więc jestem znów ,,u siebie" w Getyndze i poprostu niechce mi się wierzyć, że gdziekolwiek wyjeżdżałem (...). Człowiek to jednak dziwne bydlę. Dopóki jechałem to mi się zdawało, że ciągnę ostatkiem sił i że dalej nie dam rady, a wystarczyło kilka godzin wypoczynku żeby o wszystkim zapomnieć. To jest chyba ta tajemnica dlaczego potrafimy się w życiu zdobyć na wielokrotne pokonywanie trudów. Gdybyśmy zawsze mieli świeżo w pamięci to co nas czeka to naprawdę trzeba by bardzo silnego charakteru ażeby się powtórnie zmusić i opanować.

W październiku 1930 roku Orlicz został starszym asystentem w II Katedrze Matematyki na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej. Kierownikiem Katedry był profesor Antoni Łomnicki. Pracował tutaj do 1937 roku.

W dniu 28 marca 1925 roku Państwowa Komisja Egzaminacyjna we Lwowie dla kandydatów na nauczycieli szkół średnich dopuściła W. Orlicza do egzaminu na nauczyciela matematyki jako przedmiotu głównego i fizyki jako przedmiotu dodatkowego w szkołach średnich z językiem nauczania

polskim. Jednak dopiero 14 grudnia 1931 roku Orlicz uzyskał czterostronicowy, wypełniony drobnym, kaligraficznym pismem *DYPLOM nauczyciela szkół średnich.* Komisja Egzaminacyjna składała się z profesorów uniwersyteckich: Kazimierza Chylińskiego, Kazimierza Adjukiewicza i Stanisława Ruziewicza.

Powiem tylko krótko, że aby otrzymać dyplom, trzeba było napisać wypracowanie domowe (Orlicz pisał o *O ogólnej teorii sumowalności*), przebrnąć dwa egzaminy pisemne z matematyki i jeden pisemny z fizyki, a następnie zdać egzamin ustny z matematyki i fizyki (Orlicz zdał je 5 czerwca 1925 roku przed egzaminatorami – H. Steinhausem i S. Ruziewiczem). Ponadto podczas egzaminu sprawdzono, że znajomość języka niemieckiego jest zadawalająca. Trzecią część egzaminu stanowiła praktyka w szkole. Zaliczono Orliczowi pracę, w latach 1927–1929 w prywatnym Gimnazjum Żeńskim S. S. De Notre Dame we Lwowie oraz w latach 1930–1931 w Korpusie Kadetów we Lwowie i dopiero wtedy Orlicz został dopuszczony do egzaminu pedagogicznego. *Egzamin Pedagogiczny* to lekcja próbna oraz egzamin ustny ze znajomości języka polskiego (odbył się 14 grudnia 1931 roku). Wreszcie po tych wszystkich procedurach Komisja stwierdziła 14 grudnia 1931 roku, że *Władysław Roman Orlicz posiada kwalifikacje na nauczyciela szkół średnich z matematyki jako przedmiotu głównego oraz z fizyki jako przedmiotu dodatkowego z językiem nauczania polskim.*

I niech dziś ktoś spróbuje powiedzieć, że miał dużo pytań i ciężki egzamin magisterski. Dokładne omówienie całej procedury egzaminacyjnej, łącznie z pytaniami zadanymi Orliczowi opisałem w [M03].

Rok 1932 był ważny w życiu Orlicza. Wtedy właśnie powstały *przestrzenie Orlicza.* Dodatkowy warunek na funkcję generującą przestrzenie Orlicza, tzw. warunek Δ_2 został opuszczony w 1936 roku tzn. przestrzenie Orlicza pojawiły się wtedy w pełnej ogólności bez tego dodatkowego założenia. Od tego czasu przestrzeniami Orlicza interesują się matematycy na całym świecie.

22 czerwca 1934 roku Orlicz uzyskał habilitację, przedstawiając Radzie Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Jana Kazimierza rozprawę *Z badań nad układami ortogonalnemi.* Recenzentami byli S. Banach, H. Steinhaus i E. Żyliński, a wykład habilitacyjny miał tytuł *O pojęciu granicy i problemach sumowalności.* Rezultaty jego prac nad układami ortogonalnymi miały charakter fundamentalny i wnosiły bardzo istotny wkład w rozwój tej części analizy, co zostało podkreślone np. w książce B. S. Kashina i A. A. Saakyana *Szeregi ortogonalne*, wydanej w 1984 roku.

Na jednej z broszur zawierającej rozprawę habilitacyjną, którą Orlicz ofiarował żonie Zofii znajduje się bardzo osobista i intymna dedykacja: *Kochanemu Bureczkowi – Rudasek* (por. [M04, zdj. 24]). Przed śmiercią Pani Zofii sprawdziłem czy tak właśnie mówili do siebie w domu. Pani Zofia potwierdziła.

1 października 1935 roku awansował Orlicz na stanowisko adiunkta na Politechnice i równocześnie otrzymał *veniam legendi* na Uniwersytecie, co oznaczało prawo wykładania.

Na Uniwersytecie Jana Kazimierza wykładał: *Funkcje prawie periodyczne* (1934/35: II trysemestr, 2 godziny tygodniowo), *Rozwinięcia Fouriera i ortogonalne* (1935/36: I i II trysemestr, 2 godz. tyg.), *Interpolacje i przybliżone kwadratury* (1936: II trysemestr), *Szeregi Fouriera* (1936-1937: I, II i III trysemestr, 2 godz. tyg.). Zachowały się nawet jego osobiste notatki do tych wykładów w Archiwum PAN w Poznaniu [Ar91].

Należy tutaj wspomnieć o słynnej *Szkole Lwowskiej* oraz o *Kawiarni Szkockiej.* W latach trzydziestych powstała we Lwowie bardzo silna w skali świata, grupa wybitnych matematyków, rozwijających analizę funkcjonalną. Grupę tę nazwano *Lwowską Szkołą Matematyczną*, a jej twórcy, Stefan Banach i Hugo Steinhaus, zaliczają się do klasyków matematyki w skali międzynarodowej. Szkoła ta zasłynęła niekonwencjonalnymi metodami pracy. Do legendy przeszły systematyczne spotkania i dyskusje jej członków w lokalu Kawiarnii Szkockiej. Tam powstała słynna *Księga Szkocka.* Był to gruby zeszyt – notatnik, do którego wpisywano problemy, jakich w danej chwili nie udało się rozwiązać. Często stawiający problem dopisywał obietnicę uhonorowania osoby, która znajdzie rozwiązanie, nagrodą w postaci butelki wina lub piwa a nawet żywą gęsią.

Do uczestników spotkań w Kawiarnii Szkockiej oraz współautorów problemów w Księdze Szkockiej należeli Stefan Banach (1892-1945), Hugo Steinhaus (1887-1972), Stanisław Mazur (1905-1981), Władysław Orlicz (1903-1990), Juliusz Paweł Schauder (1899-1943) a także: Herman Auerbach (1901-1942), Zygmunt Wilhelm Birnbaum (1903-2000), Maks Eidelheit (1911-1943), Marek Kac (1909-1985),

Stefan Kaczmarz (1895-1939), Antoni Łomnicki (1881-1941), Władysław Nikliborc (1899-1948), Stanisław Ruziewicz (1889-1941), Józef Schreier (1908-1943), Ludwik Sternbach (1905-1943), Włodzimierz Stożek (1883-1941), Stanisław Ulam (1909-1984), Eustachy Żyliński (1889-1954). W spotkaniach brali udział także matematycy warszawscy: Karol Borsuk (1905-1982), Samuel Eilenberg (1913-1998), Kazimierz Kuratowski (1896-1980), Bronisław Knaster (1893-1980), Edward Szpilrajn Marczewski (1907-1976), Stanisław Saks (1897-1942), Wacław Sierpiński (1882-1969) i Alfred Tarski (1902-1983).

Odnotujmy, że żywą gęś wręczył S. Mazur w 1972 roku, w Centrum im. S. Banacha w Warszawie, 28-letniemu matematykowi szwedzkiemu Per Enflö za negatywne rozwiązanie problemu aproksymacji w przestrzeniach Banacha. Dr Per Enflö, w maju 1972 roku, po 5 latach pracy, na 25 stronach maszynopisu udowodnił, że odpowiedź na problem 153 wpisany do *Księgi Szkockiej* przez Mazura 36 lat wcześniej, jest negatywna. A Mazur zaznaczył przy tym problemie, że za jego rozwiązanie ofiaruje żywą gęś! Uroczystość wręczenia nagrody odbyła się w 14 grudnia 1972 roku w Warszawie w Centrum Banacha. Moment wręczenia gęsi Szwedowi odnotowały gazety w Polsce, a w jednej z nich napisano:

> *W towarzystwie polskich matematyków Szwed zjadł w Warszawie gęś – nagrodę. Przepisy sanitarne obowiązujące między krajami Europy (przewóz lotniczy żywych stworzeń) są bowiem nie mniej skomplikowane niż problem 153.*

Większość pytań wpisanych do *Księgi Szkockiej*, a było ich ponad 190, ma już dzisiaj swoje odpowiedzi. Autorem, lub współautorem, 14 spośród nich był Orlicz. *Księga Szkocka* została przetłumaczona na język angielski i wydana w Los Alamos w 1957 roku. Drugie jej wydanie, już jako książki, opublikowało w 1977 roku wydawnictwo Birkhäuser. Zainteresowanych *Księgą Szkocką* i losami zapisanych tam problemów odsyłam do książki R. D. Mauldina, *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Cafe*, Birkhäuser, Boston - Basel - Stuttgart 1981. Miałem zresztą okazję pisać, umieszczony w tej książce, komentarz do problemu 87. Dodam też, że mój wykład habilitacyjny na Uniwersytecie w Luleå przedstawiony 4 września 1991 roku dotyczył *Księgi Szkockiej.*

14 września 1937 roku W. Orlicz został profesorem nadzwyczajnym matematyki na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Poznańskiego, obejmując stanowisko po zmarłym Kazimierzu Abramowiczu. Nominację W. Orlicza na stanowisko profesora podpisał prezydent Ignacy Mościcki (por. [M04], zdj. 27). Dodajmy, że na profesurę w Poznaniu kandydował też przyjaciel Władysława Orlicza, Stanisław Mazur, bliski współpracownik Stefana Banacha. Pani Zofia Orliczowa powiedziała kiedyś, że jedną z przyczyn odrzucenia wniosku Mazura były jego lewicowe poglądy. Jesienią 1939 roku powinien był też rozpocząć pracę na Uniwersytecie Poznańskim Józef Marcinkiewicz, doskonale zapowiadający się uczeń Antoniego Zygmunda, profesora w Wilnie.

Opuszczenie Lwowa nie było dla Władysława Orlicza decyzją łatwą. Tracił codzienny kontakt z Lwowską Szkołą Matematyczną. Wspominając swoje poznańskie początki z lat 1937-39 Orlicz stwierdzał, że takich zadań z całek krzywoliniowych i powierzchniowych jakie przeliczano na ćwiczeniach w Poznaniu nigdy przedtem nie widział i próbując zmierzyć się z nimi samodzielnie, miewał często ogromne kłopoty.

Wybuch drugiej wojny światowej zastał Profesora Orlicza we Lwowie, gdzie przebywał na wakacjach. Do Poznania nie miał oczywiście po co wracać. Zameldowanie we Lwowie przed 1939 umożliwiło mu pobyt i pracę w tym mieście zarówno w czasie okupacji sowieckiej, jak i niemieckiej. We Lwowie mieszkał przy ulicy Kopcowej 3.

W listopadzie 1939 roku został zatrudniony na Politechnice, gdzie objął wakującą adiunkturę po nieobecnym Stefanie Kaczmarzu. W okresie od 31 grudnia 1939 do 22 czerwca 1941 był profesorem przy Katedrze Matematyki na Państwowym Uniwersytecie Lwowskim im. Iwana Franki. Jednocześnie też został pracownikiem Instytutu Matematycznego Ukraińskiej Akademii Nauk w Kijowie.

Podczas okupacji niemieckiej (1941–1944) pracował oficjalnie jako nauczyciel w Szkole Handlowej (XII 1941 – VIII 1942) i Publicznej Rzemieślniczej Szkole Zawodowej aż do 1 lutego 1943 r., po czym objął stanowisko asystenta w Państwowych Kursach Lasowych aż do 30 czerwca 1944 r. Nieoficjalnie prowadził też tajne nauczanie gimnazjalne i akademickie.

Pierwszym wypromowanym przez Władysława Orlicza doktorem był Andrzej Alexiewicz, który obronił 1 maja 1944 roku rozprawę *O ciągach operatorów* przed komisją złożoną z profesorów: Nikliborca, Orlicza i Zierkhoffera. Z obroną doktorską Alexiewicza wiąże się pewna anegdota. Otóż, w

latach 80-tych, w czasie spotkania szerszego grona matematyków w Poznaniu z okazji imienin Profesora Orlicza, ten ostatni zaczął wspominać ową obronę podkreślając, że doktorant był doskonale przygotowany i egzaminujący byli bardzo zadowoleni z udzielanych im odpowiedzi. Wówczas przysłuchujący się tej relacji Jerzy Albrycht powiedział:

> *nie dziwię się zachwytom Komisji, bo dobrze pamiętam, iż w dniu obrony było silne bombardowanie Lwowa i zapewne huk eksplozji zagłuszał złe odpowiedzi.*

Po ponownym zajęciu Lwowa przez Armię Czerwoną Orlicz podjął pracę na uniwersytecie. Od 31 sierpnia 1944 roku do 10 lutego 1945 roku był on kierownikiem Katedry Teorii Funkcji w Państwowym Uniwersytecie Lwowskim im. Iwana Franki.

W 2002 roku pani Susan H. Case opublikowała w Stanach Zjednoczonych tomik wierszy o Kawiarni Szkockiej zatytułowany *The Scottish Café*. Autorka nigdy nie była we Lwowie i nie zna języka polskiego, ale była zauroczona matematykami we Lwowie w czasie wojny, którzy pracowali i żyli w miarę normalnie pomimo trwającej wojny. Poruszona była tym zachowaniem z powodu beznadziejności, jaka pojawiła się wśród mieszkańców Nowego Jorku po ataku na World Trade Center w dniu 11 września 2001 r. Jak sama stwierdziła: *Dym z palących się budynków był widoczny z okna mojego mieszkania. Nikt nie wiedział jaki będzie następny horror. Myślałam o uczonych z Kawiarni Szkockiej, którzy mieli do czynienia ze znacznie gorszą sytuacją niż my.* Pojawiają się więc u niej w wierszach: Auerbach, Banach, Kac, Tarski, Ulam, Lebesgue, Łomnicki, Stożek, Mazur, Orlicz, Saks, Schauder i Steinhaus. Ja pozwolę sobie zacytować tłumaczenie wiersza pt. *Rodzynki*, opisującego Orlicza, dziękując przy tym za znaczącą pomoc w tłumaczeniu Romanowi Dudzie (faktycznie to jest to bardziej jego niż moje tłumaczenie) oraz autorce za jej zgodę na umieszczenie:

Orlicz jest bywalcem Szkockiej Kawiarni
mieszkanie we Lwowie ma doprawdy małe
i nawet przestrzenie Orlicza
nie dają mu swobody w domu
który jego żona wypełnia tuzinami
poduszeczek na igły
tworzy więc w kawiarni funkcyjne przestrzenie
pełne jego ulubionych serników
z których wybiera rodzynki
bo go irytują
i używa ich do skomponowania 14 problemów
jakie wpisuje do Księgi Szkockiej
jego mistrz Steinhaus nie wpadł jeszcze w tarapaty
jeszcze się nie ukrywa przed Niemcami
którzy jeszcze nie wyruszyli w swoją drogę do Stalingradu
jego mistrz Banach nie został jeszcze aresztowany
za handlowanie niemiecką walutą
nic z tego nie jest jeszcze prawdą
matematyka jeszcze nie zamilkła
więcej niż 25 matematyków
w Polsce jeszcze nie jest martwych
pozwala to Orliczowi zawisnąć
na cudowną chwilę w przestrzeni i w czasie
kiedy pianka i jajko
i chłopski ser i kostki cukru
ciągle smakują wyjątkowo słodko
troskliwie osłaniane przez kelnera z Kawiarni
przed spaleniem

W połowie lutego 1945 r. Orlicz repatriował się i od 5 maja 1945 r. objął ponownie stanowisko profesorskie na Uniwersytecie Poznańskim. Był jedynym matematykiem z tytułem profesora i miał do pomocy dwóch doktorów. Zakład Matematyki UP w Collegium Chemicum został zniszczony, ale ocalała częściowo biblioteka. Przedwojenny organizator matematyki poznańskiej, prof. Zdzisław

Krygowski (1872–1955), emerytowany po 1938 roku, także powrócił do Poznania w 1946 r. i został zaangażowany na UP jako profesor kontraktowy do 1955 roku.

Jesienią 1945 roku Orlicz, razem z grupą swoich lwowskich kolegów i mistrzów, otrzymał propozycję pracy w tworzonej we Wrocławiu *Śląskiej Szkole Głównej*. Nie uległ jednak namowom, m.in. Hugo Steinhausa, i pozostał w mieście nad Wartą. Trudności kadrowe przeżywały wówczas wszystkie ośrodki matematyczne w Polsce.

Matematyka polska wyszła z zawieruchy wojennej straszliwie okaleczona. Więcej niż połowa aktywnie pracujących matematyków zginęła, a baza materialna była niemal całkowicie zniszczona. Zmarli wówczas: Banach, Chwistek, Dickstein, Hoborski, Kaczmarz, Kempisty, Mazurkiewicz, Wilkosz, Zaremba; zostali zamordowani: Auerbach, Bartel, Eidelheit, Kerner, Kirszbraun, Lindenbaum, A. Łomnicki, Marcinkiewicz, Rajchman, Ruziewicz, Saks, Schauder, Schreier, Sternbach, Stożek, Zalcwaser; a wielu pozostało za granicą, najczęściej w USA: Birnbaum, Eilenberg, Kac, Z. Łomnicki, Neyman-Spława, Schaerf, Tarski, Ulam, Zygmund.

21 lipca 1948 roku Orlicz otrzymał tytuł na profesora zwyczajnego. W tym też czasie dodatkowo pracował w Państwowym Instytucie Matematycznym w Warszawie, włączonym wkrótce w strukturę Polskiej Akademii Nauk, jako Instytut Matematyczny. Jego związki z Instytutem Matematycznym PAN trwały do końca życia. Był tam przez pewien czas kierownikiem Zakładu Analizy Funkcjonalnej, długoletnim członkiem Rady Naukowej Instytutu i zastępcą jej przewodniczącego.

W roku 1956 został Członkiem Korespondentem, a w 1961 Członkiem Rzeczywistym PAN. Można tutaj dodać zdanie jakie w 1960 roku wypowiedział Steinhaus:

> *Mazur i Orlicz są bezpośrednimi uczniami Banacha; to oni reprezentują dziś w Polsce teorię operacji, ich nazwiska na okładce „Studia Mathematica" są bezpośrednią kontynuacją Banachowego programu naukowego.*

Od 1961 roku do czasu przejścia na emeryturę tzn. do wiosny 1970 roku, kierował I Katedrą Matematyki na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Adama Mickiewicza. W tym czasie znacznie wzrosła ilość studentów matematyki oraz innych specjalności, wymagających przygotowania matematycznego. Orlicz wykładał głównie analizę funkcjonalną. Gdy pojawili się pierwsi docenci i przejęli część zajęć dydaktycznych, mógł poświęcić więcej czasu prowadzeniu seminariów magisterskich i doktoranckich. Nie ograniczał się wówczas tylko do analizy funkcjonalnej, lecz zachęcał uczniów do pracy w innych dziedzinach, zwłaszcza w zastosowaniach matematyki. Prowadzone przez niego prace magisterskie obejmowały również analizę numeryczną, rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną.

W Archiwum UAM wyszukałem tytuł wykładów jakie prowadził Orlicz na Uniwersytecie w Poznaniu przed wojną i po wojnie do roku 1961. Do materiałów z lat 1949/50, 1951/52 i 1953/54 nie udało mi się dotrzeć. Przed wojną Orlicz uczył tylko w roku akademickim 1938/39 i prowadził wtedy przez 3 trymestry *Rachunek różniczkowy*–4gt[1], *Rachunek całkowy*–3gt, *Seminarium matematyczne*–1gt i *Teoria funkcji zmiennej rzeczywistej*–2gt.

Powojenne zajęcia w Poznaniu to (wykłady i ćwiczenia alfabetycznie w danym roku akademickim):

1945/46 : *Algebra wyższa* (3tr-2gt[2]), *Konserwatorium matematyczne* (dla zamierzających pracować naukowo i magistrantów) (3tr-2gt), *Matematyka dla biologów* (3tr-2gt), *Proseminarium matematyczne* (3tr-2gt), *Rachunek prawdopodobieństwa* (3tr-2gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. I* (3tr-4gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. II* (3tr-3gt), *Seminarium matematyczne niższe* (dla studentów II i III roku) (3tr-2gt), *Seminarium matematyczne wyższe* (1gt).
Ćwiczenia z algebry (1gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. I* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. II* (3tr-3gt).

1946/47 : *Konserwatorium matematyczne* (dla zamierzających pracować naukowo i magistrantów) (3tr-1gt), *Matematyka dla biologów* (3tr-2gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. I* (3tr-3gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. II* (3tr-3gt), *Równania całkowe* (3tr-2gt), *Seminarium matematyczne niższe* (dla studentów II i III roku) (1gt), *Seminarium matematyczne wyższe* (1gt), *Teoria funkcji zmiennej rzeczywistej* (3tr-2gt), *Wybrane działy z analizy matematycznej* (1tr-2gt).

[1] 3gt oznacza trzy godziny tygodniowo oraz analogicznie rozumie się dalej z innymi liczbami stojącymi przed „gt".
[2] 3tr-2gt oznacza 3 trymestry po 2 godziny tygodniowo oraz analogicznie rozumie się dalej z innymi liczbami stojącymi przed „tr" i „gt".

Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. I (3tr-3gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. II* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z teorii funkcji zmiennej rzeczywistej* (3tr-2gt), *Ćwiczenia z wybranych działów analizy matematycznej* (1tr-3gt).

1947/48 : *Konserwatorium matematyczne* (dla zamierzających pracować naukowo i magistrantów) (3tr-1gt), *Matematyka dla biologów* (3tr-2gt), *Rachunek prawdopodobieństwa* (3tr-2gt, *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. I* (3tr-3gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. II* (2tr-4gt i 1tr-2gt), *Równania całkowe* (3tr-1gt), *Seminarium matematyczne niższe* (3tr-2gt), *Wybrane działy z analizy matematycznej* (3tr-2gt).
Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa (3tr-1gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. I* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. II* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z równań różniczkowych* (3tr-2gt), *Ćwiczenia z wybranych działów analizy matematycznej* (1tr-3gt).

1948/49 : *Konserwatorium matematyczne* (dla zamierzających pracować naukowo i magistrantów) (3tr-1gt), *Matematyka dla biologów* (3tr-2gt), *Rachunek prawdopodobieństwa* (2gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. I* (3tr-3gt), *Rachunek różniczkowy i całkowy cz. II* (2tr-4gt, 1tr-2gt), *Seminarium matematyczne niższe* (dla studentów II i III roku) (3tr-2gt), *Wybrane działy z analizy matematycznej* (3tr-2gt).
Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa (3tr-1gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. I* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego i całkowego cz. II* (3tr-3gt), *Ćwiczenia z wybranych działów analizy matematycznej* (1tr-3gt).

1950/51 : *Analiza matematyczna I* (4gt), *Funkcje analityczne* (2gt), *Matematyka dla przyrodników* (2gt), *Seminarium matematyczne wyższe* (2gt), *Teoria operacji* (dla osób pragnących pracować naukowo) (1gt).
Ćwiczenia z analizy matematycznej I (3gt), *Ćwiczenia z funkcji analitycznych* (1gt), *Ćwiczenia z matematyki dla przyrodników* (2gt).

1952/53 : *Analiza matematyczna I* (5gt), *Elementy rachunku prawdopodobieństwa* dla III roku (2gt), *Funkcje zmiennej rzeczywistej ze wstępem do analizy funkcjonalnej* dla II roku (3gt).

1954/55 : *Analiza matematyczna II* dla II roku (4gt), *Analiza matematyczna II* dla II roku fizyki (5gt), *Funkcje analityczne* dla III roku (2gt), *Funkcje rzeczywiste* dla III i IV roku (2gt), *Seminarium* dla IV roku (2gt).

1955/56 : *Funkcje analityczne* dla III roku (2gt), *Funkcje rzeczywiste* dla III i IV roku (2gt), *Wykład monograficzny* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla IV roku (2gt).
Ćwiczenia z funkcji analitycznych dla III roku (2gt), *Ćwiczenia z funkcji rzeczywistych* dla IV roku (1gt), *Ćwiczenia z teorii mnogości z topologią* dla III roku (1gt).

1956/57 : *Seminarium* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla V roku (2gt), *Teoria mnogości z topologią* dla III roku (3gt).

1957/58 : *Funkcje analityczne* dla III roku (2gt), *Funkcje analityczne* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla V roku (2gt), *Wykład monograficzny* dla V roku (2gt).

1958/59 : *Funkcje analityczne* dla III roku (2gt), *Seminarium* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla V roku (2gt), *Wykład monograficzny* dla V roku (2gt).

1959/60 : *Wykład monograficzny* dla IV roku (2gt), *Wykład monograficzny* dla V roku (2gt), *Seminarium* dla IV roku (2gt), *Seminarium* dla V roku (2gt).

1960/61 : *Seminarium* dla IV roku (2 gt), *Seminarium* dla V roku (2gt), *Wykład monograficzny* dla V roku (2gt).

W siedzibie Oddziału Poznańskiego Instytutu Matematycznego PAN (utworzonego oczywiście jego staraniem) mieszczącego sie wtedy przy ul. Mielżyńskiego 27/29, prowadził *Konwersatorium z Wybranych Zagadnień Analizy Funkcjonalnej*, nazywane potocznie *Seminarium Orlicza* albo *Środowym Seminarium Orlicza*. Odbywało się ono we środy, we wcześniejszych latach przed 11.00, a później w godzinach 12.30—14.00. Profesor siedział zawsze w pierwszym rzędzie na drugim krześle licząc od drzwi.

Dbając o atrakcyjność tych spotkań, zapraszał do udziału specjalistów spoza ośrodka poznańskiego, a często także gości zagranicznych. Zwracał szczególnie uwagę na młodych matematyków, zaczynających karierę naukową, którzy na tych seminariach mieli okazję do stawiania pierwszych kroków. Profesor dawał im rzeczowe komentarze i cenne wskazówki dotyczące kierunków dalszych badań oraz zachęcał do kontynuowania prac. Potrafił także bezlitośnie obnażać wszystkie słabe punkty prezentowanych dowodów i był ,,biczem bożym" dla prelegentów miernych. Każde seminarium kończyło się podziękowaniami Profesora, jego krótkim komentarzem i pytaniami o związki przedstawionych twierdzeń z wcześniejszymi, a zwłaszcza klasycznymi wynikami i zagadnieniami pokrewnymi, a często także uwagami zawierającymi sugestie co do kierunków dalszych prac.

Seminarium Orlicza podtrzymywało tradycje przedwojennej lwowskiej szkoły matematycznej, stworzonej przez Banacha i Steinhausa, w której wypracowano specyficzne metody pracy zespołowej. Profesor przychodził do Oddziału codziennie o godzinie 13.00 (w dzień seminarium wcześniej). Między 15.00 a 17.00 miał tzw. drzemkę w gabinecie. Od 17.00 do 21.00, a czasam i nawet do 21.30, pracował lub przyjmował gości. Około 21.30 wracał do domu na ulicę Libelta 22 m. 4.

Bardzo charakterystyczny był sposób zwracania się Orlicza do osób znanych mu i związanych w jakiś sposób z matematyką. Po oczywistym *dzień dobry* padały zawsze słowa *Panie Kolego!* lub *Koleżanko!* (rzadziej *Pani Aniu*, *Pani Zosiu* itp.).

Odnotujmy jeszcze, że w 1989 roku u Orlicza pojawił się zator w prawej nodze, ale dzięki operacji w październiku 1989 r. uniknął amputacji. Jednak nie mógł on chodzić przez pewien czas. W tym czasie tzn. od października 1989 r. do czerwca 1990 r. Seminarium Orlicza prowadzone było przez Henryka Hudzika. Orlicz poprosił go o to, bo nie chciał by była luka w prowadzeniu Seminarium, gdyż planował po wyzdrowieniu je kontynuować. Rehabilitacja nogi przebiegała pomyślnie i Orlicz zaczął ponownie chodzić, najpierw wokół stołu, a poźniej już wolno po ulicach (pomagali mu przy tym matematycy poznańscy związani z Seminarium).

W liście z 10 maja 1990 r. pisał do mnie:

> *Drogi Panie Kolego! Serdecznie dziękuję Panu za listy i wiadomości. Proszę się nie dziwić, że dopiero dzisiaj piszę do Pana kilka słów ale ze mną nie jest dobrze. Już siódmy miesiąc nie opuszczam mojego mieszkania. Operowana prawa noga (założono mi w październiku sztuczną żyłę tętnicową) wciąż boli i nie mogę się bez pomocy poruszać. Przychodzą na szczęście prawie codziennie koledzy do mnie. Jestem więc zorientowany w sytuacji na wyższych uczelniach i w IMPAN. (...)*

Niestety swojego Seminarium Orlicz już nie kontynuował, gdyż zmarł nagle w sierpniu 1990 roku.

Władysław Orlicz wypromował w ciągu 40 lat 39 doktorów; ja byłem numerem 37 (por. spis w części 5). Liczba prac magisterskich przygotowanych pod jego kierunkiem jest także imponująca. Było ich ponad 500. Tematy prac, czy to doktorskich, czy magisterskich, były zawsze dostosowane do zakresu uzdolnień i możliwości ucznia. Napisał też wiele recenzji rozpraw doktorskich i habilitacyjnych. Pisał także oceny dorobku kandydatów do tytułów profesorskich.

Brał on udział w Kongresach Matematycznych w Edynburgu (1958), Sztokholmie (1962) i Warszawie (1983), gdzie był honorowym prezydentem Kongresu. Uczestniczył w konferencjach zagranicznych i wizytował wiele uczelni europejskich (zwłaszcza niemieckich). Jesienią 1958 roku przebywał w Chinach (Pekin, Szanghaj, Kanton). Odwiedził Jerozolimę i Kanadę. Wypiszmy, w miarę możliwości, wszelkie jego wizyty zagraniczne oraz udział w kongresach i konferencjach (w porządku chronologicznym):

1928 –1930: Uniwersytet w Getyndze (11 XII 1928–XII 1930 z przerwami na pobyty we Lwowie).

1927 : *Pierwszy Polski Zjazd Matematyków*, Lwów (7-10 IX 1927) z odczytem: *O przeciętnej zbieżności rozwinięć ortogonalnych.*

1937 : *III Kongres Matematyków Polskich*, Warszawa (28 IX-3 X 1937) z odczytem: S. Mazur i W. Orlicz, *O przestrzeniach liniowo-metrycznych.*

1941 : *I Sesja Naukowa Lwowskiego Uniwersytetu Państwowego im. Iwana Franki*, Lwów (23 I–3 II 1941) z odczytem: *O funkcjach Höldera.*

1946 : *IV Polski Zjazd Matematyczny*, Wrocław (12-14 XII 1946) z odczytami: *O pracach naukowych Stefana Banacha* oraz A. Alexiewicz i W. Orlicz, *Przyczynki do teorii funkcji abstrakcyjnych.*

1947 : *V Zjazd Matematyków Polskich*, Kraków (29-31 V 1947) z odczytem: *O pewnej klasie ciągów funkcyjnych rozbieżnych asymptotycznie.*

1948 : *VI Zjazd Matematyków Polskich*, Warszawa (20-23 IX 1948) z odczytem: *O pewnej klasie ciągów i operacji.*

1953 : *VIII Kongres Matematyków Polskich*, Warszawa (6-12 IX 1953) z odczytami *O funkcjach o skończonym wahaniu zależnych od parametru* oraz A. Alexiewicz i W. Orlicz, *Funkcje analityczne wektorowe w rzeczywistych przestrzeniach Banacha*; Wrocławska konferencja dydaktyczna *Dydaktyka analizy matematycznej na uniwersytetach*, Wrocław (29-30 V 1953) z odczytem *O programie analizy matematycznej w uniwersyteckim studium matematycznym.*

1955 : Konferencja poświęcona algebrze, Toruń (21-23 V 1955); Wizyta naukowa w Czeskiej Akademii Nauk z 5 odczytami w Pradze, Brnie i Bratyslawie (6-31 X 1955).

1956 : *Wszechzwiązkowy Zjazd poświęcony Analizie Funkcjonalnej*, Moskwa (17-24 I 1956) z odczytem *On Saks spaces*; *Third All-Union Congress of Soviet Mathematicians* (25 VI–4 VII 1956) z odczytem *Sequences of linear operations depending on a parameter*; Congress of the Austrian Mathematical Society, Vienna (IX 1956) z odczytem *On some problems in Saks spaces.*

1957 : *Konferencja z Analizy Funkcjonalnej*, Zakopane (8-19 I 1957) z odczytem *O przestrzeniach Saksa i ich zastosowaniach*; *Kolokwium z Analizy Harmonicznej*, Żelazowa Wola (16-18 V 1957); Wizyta naukowa w Jugoslawii w Belgradzie, Zagrzebiu, Nowym Sadzie i Lublianie (16-31 X 1957) z 5 odczytami *Über gewisse Verallgemeinerung von Räumen L^p und l^p* i *Saksräume und ihre Anwedungen*; *Colloqium in Theory of Sequences*, Bruksela (18-20 XII 1957) z odczytem *Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen.*

1958 : *International Congress of Mathematicians*, Edinburgh (14-21 VIII 1958) z komunikatem; Wizyta naukowa w Chinach (9 X – 9 XII 1958) z wykładami i odczytami: Pekin (15 X–17 XI i 5-9 XII), Nanjing (17-20 XI), Shanghai (21-25 XI), Hangshou (26-28 XI), Guangzhou (Canton; 29 XI–2 XII) i Wuhan (Hankon; 3-4 XII).

1959 : *Congress of Italian Mathematicians*, Neapol (11-17 IX 1959) z komunikatem; konferencja *Theory of Series*, Budapeszt (6-8 X 1959) z komunikatem; Konferencja z Algebry Topologicznej, Wrocław (8-10 X 1959) z odczytem J. Musielak i i W. Orlicz, *Quelques remarques sur les espaces modulaires.*

1960 : *International Symposium Linear Spaces*, Jerozolima (5-12 VII 1960) z odczytem *On spaces of φ-integrable functions*; *Konferencja z Analizy Funkcjonalnej*, Jabłonna (IX 1960) z odczytem *Theory of Saks spaces.*

1961 : Międzynarodowa konferencja *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra*, Praga (1-8 IX 1961) z odczytem *Über gewisse Klassen von Modularräumen*; RFN (Halle, IX 1961); Konferencja *Teoria sumowalności, zagadnienia aproksymacyjne i szeregi Fouriera*, Poznań (6-7 X 1961).

1962 : *International Congress of Mathematicians*, Sztokholm (15-22 VIII 1962).

1963 : Wizyta naukowa w RFN (VI 1963; między innymi: Göttingen, Heidelberg).

1967 : *VI Sesja naukowa PTM*, Poznań (6-7 IV 1967).

1968 : VII Österreichischen Mathematiker Kongress, Linz (16-20 IX 1968).

1969 : *IX Zjazd Matematyków Polskich*, Kraków (3-9 IX 1969) – Orlicz był w Komitecie Organizacyjnym.

1970 : Wizyta naukowa w RFN (20 X–3 XI 1970: Frankfurt, Saarbrücken, Stuttgart, Tübingen).

1971 : Wizyta naukowa w Tbilisi (IX 1971); Międzynarodowa konferencja *Function Spaces and Modular Spaces*, Poznań (1-5 X 1971) z odczytem R. Leśniewicz i W. Orlicz, *On existence of Riemann-Stieltjes integral for functions of finite φ-variation.*

1972 : Wizyta naukowa w Bratysławie (10 dni); *Sesja naukowa z okazji 500-nego posiedzenia Oddziału Poznańskiego PTM*, Poznań (16-17 V 1972).

1973 : Wizyty naukowe: w RFN (Stuttgart, 16 V–20 VI 1973), w Czechosłowacji (Bratysława, 3-8 IX 1973), w Austrii (Wiedeń, 16-21 IX 1973).

1974 : Wizyta naukowa w RFN (Berlin, Bonn, Frankfurt, Hannower, Heidelberg, Kaiserslautern, Karlsruhe, Mainz, Stuttgart, Tübingen, Ulm, 14 V–14 VII 1974); Wizyta naukowa w Toronto (3 miesiące) z odczytami w London-Ontario, Peterborough, Waterloo.

1977 : *XIII Sesja naukowa i Walne Zgromadzenie PTM*, Nowy Sącz (2-4VI 1977)– Orlicz uczestniczył jako prezes PTM.

1978 : *XIV Sesja naukowa i Walne Zgromadzenie PTM*, Poznań (5-8VI 1978)– Orlicz uczestniczył jako prezes PTM; Uroczystość z okazji 30-lecia Instytutu Matematycznego PAN, Warszawa (24 XI 1978)–Orlicz został udekorowany Orderem Sztandaru Pracy I klasy.

1979 : *XII Zjazd Matematyków Polskich*, Łódź (12-15 IX 1979)–Orlicz uczestniczył jako prezes PTM: otwierał Zjazd 12 września 1979 roku w Filharmonii Łódzkiej oraz miał odczyt *O lwowskiej szkole matematycznej.*

1983 : *International Congress of Mathematicians*, Warszawa (16-24 VIII 1983), gdzie był honorowym prezydentem Kongresu; *Sesja naukowa dla uczczenia pamięci profesora Stanisława Mazura*, Warszawa (3-4 XI 1983) z odczytem *Wkład Stanisława Mazura w ogólną teorię limesowalności.*

1986 : Międzynarodowa konferencja *Function Spaces*, Poznań (25-30 VIII 1986): wizyta dużej delegacji matematyków chińskich z Harbinu rozpoczynająca stałą współpracę z Poznaniem.

1987 : Międzynarodowa konferencja *Random Graphs'87*, Poznań (27 VI–3 VII 1987): spotkanie W. Orlicza z P. Erdösem i uczestnikami.

1989 : Międzynarodowa konferencja *Function Spaces II*, Poznań (28 VIII–2 IX 1989): spotkania W. Orlicza z uczestnikami.

Wielokrotnie Orlicz uczestniczył we wrześniowych konferencjach E. Fidelisa z *Zastosowań Matematyki*.

Z Kongresu w Sztokholmie pisał w sierpniu 1962 w liście do Zofii (30 VIII 1962):

> *Dużo ciekawych rzeczy mam do opowiedzenia na temat Szwecji. (...) wogóle to bardzo przyjemnie przenieść się na chwilę w całkiem inny świat. Świat innych wyobrażeń, pojęć społecznych i wyobrażeń na temat życia codziennego. Ciężko się przeżywa powrót do naszej rzeczywistości. W Poznaniu niczego nie można dostać i tłumy ludzi w ogonkach. Takie narodowe zajęcie.*

Powiedzmy trochę więcej o wizycie Orlicza w Chinach. Od 9 października 1958 roku Orlicz i Aleksander Pełczyński wizytowali przez dwa miesące Instytut Matematyczny Chińskiej Akademii Nauk. Przez pierwszy miesiąc trwał kurs pt. *Wybrane Zagadnienia Analizy Funkcjonalnej* z 20 wykładami po niemiecku w Pekinie. Pełczyński prowadził, po angielsku, ćwiczenia do tego wykładu. Było to w okresie 15 X–17 XI 1958. Wykłady te zostały przetłumaczone na język chiński przez Guan Zhao Zhi i Li Wen Qing i wydane w Pekinie w 1963 roku wraz z 75 zadaniami wybranymi przez Pełczyńskiego [K3]. Książka ta była ważna dla matematyków chińskich, bo spowodowała zainteresowanie dużej grupy badaczy chińskich tematyką analizy funkcjonalnej. W latach 1990-91 Prof. Lee Peng Yee z Narodowego Uniwersytetu w Singapurze przetłumaczył książkę Orlicza na język angielski [K4], a Wu Congxin z Harbinu dodał, w tym angielskim wydaniu, pewne nowe rezultaty dotyczące przestrzeni Orlicza.

Po okresie pobytu w Pekinie obaj oni wizytowali, z odczytami, inne uniwersytety w Chinach. Były to uniwersytety w Nanjing (17-20 XI 1958), Shanghai (21-25 XI 1958), Hangshou (26-28 XI 1958), Guangzhou (Canton; 29 XI–2 XII 1958) i Wuhan (Hankon; 3-4 XII 1958). Powrócili do Pekinu (5-9 XII) i 9 grudnia 1958 roku wrócili do Polski. O swoich wrażeniach z Chin Orlicz pisał w wielu listach bądź na kartkach pocztowych do żony Zofii. Zacytujmy cztery:

– Pekin, 10 października 1958 roku (piątek):

> *Piszę na razie parę słów, już z Pekinu, z hotelu „Pekin" w którym mieszkamy. Wylecieliśmy z Warszawy o 17-tej do Moskwy. W porcie lotniczym w Warszawie był bałagan, dali nam złe kartki bagażowe, a urzędniczka załatwiała jak analfabetka. Lot był spokojny z przepięknym widokiem Moskwy z góry przy lądowaniu. Lotnisko w Moskwie: bałagan z którym warszawski niczym. O 23-ej wylatujemy z Moskwy samolotem TU z szybkością 850 km/godz. i o 16.00 w czwartek byliśmy już w Pekinie, z dwoma międzylądowaniami. Ale świat się skurczył. Po różnych przywitaniach i kolacji o 21-ej poszliśmy spać. Wtedy wyście brali się do obiadu. Wstaliśmy dzisiaj o 8-ej rano tzn. o porze kiedy ok 1-ej w nocy naszego czasu, normalnie zasypiam. Trzeba się do wszystkich nowości przyzwyczaić. Za chwilę mamy coś zwiedzać, a potem czeka nas jeszcze oficjalne przyjęcie. Jutro omówi się plan pobytu nim zacznie się robota. Jestem stale śpiący.*

– 20 października 1958:

> *Te pierwsze 10 dni pobytu wypełnione są szczelnie zwiedzaniem różnych zabytków w mieście (pałace, parki) i za miastem (wielki mur chiński, różne świątynie buddystów). Byliśmy też 3 razy w teatrze chińskim. Rozpocząłem swoje zajęcia i miałem 4 godz. wykładów. Pełczyński ma ćwiczenia i dyżury w Instytucie Matematycznym Akademii.*

– 30 października 1958:

> *Życie prowadzę uregulowane: wstawanie o 7.45 z wyjątkiem poniedziałków i piątków, gdy trzeba wstać o 7-ej, bo wykład zaczynam w te dni o 9.30, a dojazd autem trwa co najmniej 30 minut (15 km). Seminarium prowadzi się w czwartek o 14.30. Wykład czytam z przygotowanego maszynopisu (na szczęście, że zrobiłem tę robotę w Poznaniu). Tłumaczy się na chińskie; oprócz tego słuchacze mają teksty powielane chińskie i niemieckie. Na Seminarium, na odwrót treść mówioną po chińsku, przekładają mi na niemiecki. Jadam w restauracji europejskiej. Na utrzymanie Akademia przewiduje 5 juanów dziennie i to wystarcza. Brak zupełny jarzyn.*

– Kanton, 2 grudnia 1958:

> *Cała podróż udała się doskonale tylko za dużo wrażeń i gonitw, a więc i zmęczenie dość duże. Siedzę teraz i patrzę na ogromną rzekę Perłową, po której płyną setki dżonek i większych statków. To ostatnie spojrzenie na egzotyzm Dalekiego Wschodu. Jutro bardzo wcześnie lecimy do Hankon, gdzie zostaniemy dwa dni. Następnie powrót do Pekinu i odlot 9-go do kraju. Nie wiadomo, ile potrwa podróż do kraju. Różnie teraz w zimie bywa, czasami i 4 dni.*

A. Pełczyński opowiedział mi kilka lat temu następujące zdarzenie z Chin. Kiedy oni obaj z Orliczem zwiedzali Pałac Zimowy w Pekinie przewodnik wyrażał się negatywnie o ostatniej cesarzowej, która to przeznaczyła pieniądze na pałac zamiast na flotę do walki z japończykami. Wtedy Orlicz powiedział, że dobrze zrobiła, gdyż *japończycy by i tak flotę zniszczyli, a pałac pozostał.* Został grzecznie pouczony, że tak mówić nie można. Do Pełczyńskiego zaś stwierdził *Panie kolego! Ja mam u nich haka.*

Orlicz był redaktorem czasopism matematycznych: *Studia Mathematica* (od 1961 roku) i przez 35 lat (1955–1990) *Commentationes Mathematicae* (*Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*). Angażował się też w działalność towarzystw naukowych, a przede wszystkim w działalność Polskiego Towarzystwa Matematycznego, którego był prezesem w okresie 1977–1979 i wieloletnim członkiem honorowym. Przez 17 lat prezesował Oddziałowi Poznańskiemu Towarzystwa (1946-1963). Dość długo kierował Wydziałem Trzecim Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk (czł. zwyczajny od 1938 r., czł. honorowy od 1975 r.). W latach 1975-1977 przewodniczył Komitetowi Nauk Matematycznych PAN.

Dokonania Władysława Orlicza uhonorowano najrozmaitszymi odznaczeniami i nagrodami. Otrzymał Złoty Krzyż Zasługi (1954), Medal X-lecia Polski Ludowej (1954), Krzyż Komandorski Orderu Odrodzenia Polski (1958), Krzyż Komandorski z Gwiazdą Orderu Odrodzenia Polski (1986), Sztandar Pracy II Klasy (1973), Sztandar Pracy I Klasy (1978). Został laureatem Fundacji im. Alfreda Jurzykowskiego w 1976 roku i otrzymał indywidualne Nagrody Państwowe (II stopnia w 1952 roku i I stopnia w 1966 roku), a także Nagrodę im. Stefana Banacha Polskiego Towarzystwa Matematycznego (w 1948 roku), najwyższe odznaczenie PAN – Medal im. Kopernika (w 1973 roku), a od Uniwersytetu Warszawskiego – Medal Wacława Sierpińskiego (w 1979 roku). Ponadto Medal za zasługi dla Politechniki Poznańskiej (w 1975 roku), Nagrodę Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk (1982) i Medal Komisji Edukacji Narodowej (w 1983 roku). Został też Honorowym Członkiem Polskiego Towarzystwa Matematycznego (w 1973 roku), Członkiem Honorowym Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk oraz Zasłużonym Nauczycielem PRL w 1977 roku.

W 1974 roku Orlicz otrzymał tytuł *doktora honoris causa* Uniwersytetu York w Toronto, w 1978 roku – Politechniki Poznańskiej, a w 1983 roku – Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu (por. [M04], zdj. 53, 54 i 55 z tych uroczystości).

Z okazji jubileuszu 75-urodzin poświęcono mu dwa tomy specjalne *Commentationes Mathematicae* wydane w 1978 i 1979 roku. W 1986 roku Państwowe Wydawnictwo Naukowe zaproponowało wydanie *Dzieł Zebranych* Orlicza. Chciałbym tu wspomnieć, że poświęciłem rok czasu na napisanie artykułu o dorobku naukowym Orlicza [MM88] i na pomocy w skompletowaniu i uporządkowaniu wszystkich odbitek jego prac, a także uzupełnieniu ich abstraktami. Wszystko to ukazało się w dwóch tomach w 1988 roku jako *Władysław Orlicz, Collected Papers, PWN, Warszawa 1988* i liczy łącznie 1754 strony. Pamiętam też jak bardzo cieszył się Orlicz, kiedy zobaczył te dwa tomy.

Z żoną Zofią dzieci nie miał, ale pozostawił liczne grono swoich uczniów. Uroczystość 80-lecia urodzin, która odbyła się w siedzibie Instytutu Matematycznego PAN, Oddziału w Poznaniu, wówczas przy ulicy Mielżyńskiego 27/29 na pierwszym piętrze, zgromadziła prawie wszystkich. Ponadto z okazji kolejnych jubileuszy urodzin i śmierci odbywają się poświęcone mu konferencje, a od 1991 roku corocznie wykłady, o których bardziej konkretnie napiszę dalej.

Matematyka była dla Orlicza wszystkim, albo prawie wszystkim, bo obok matematyki zawsze interesował się filozofią i naukami przyrodniczymi. Matematyka była bez wątpienia jego przeznaczeniem. Czuł ją i rozumiał bardzo głęboko, w stopniu dostępnym tylko nielicznym. Interesował się też rozwojem nauk, nieobce mu były wielkie problemy filozofii. Poszukiwanie prawdy doprowadziło go, pod koniec życia, do pełnego uczestnictwa w życiu kościoła katolickiego. Kochał Tatry i gdy mógł, starał się spędzać choć trochę czasu w Zakopanem. W latach powojennych, przez długi okres czasu, bywał w Zakopanem nawet przez 2 miesiące. W latach późniejszych bywał 2 miesiące w Zakopanem z W. Matuszewską, a następnie 2 miesiące była w Zakopanem Zofia Orlicz.

W maju 1990 roku Orlicz napisał do mnie list (ja w tym czasie pracowałem w Caracas w Wenezueli) z którego wynika, że był chory i trochę pesymistyczny. W końcowych słowach pisał *mam nadzieję, że jednak jeszcze się zobaczymy.* Muszę tu dodać, że widzieliśmy się jeszcze na początku sierpnia 1990 roku. Orlicz był trochę sfrustrowany, ale cieszył się z naszego spotkania.

Matematyka oczarowała Orlicza we wczesnej młodości i nie zdjęła z niego swego czaru aż do ostatniej chwili życia. Orlicz zakończył je wieczorem 9 sierpnia 1990 roku, pracując nad korektą pracy [170] przyjętej do druku w *Mathematica Japonica*. Ciekawostką tutaj jest fakt, że pierwsza i ostatnia jego praca były opublikowane w Japonii. Pierwsza w *Tohoku Mathematical Journal*, a ostatnia w *Mathematica Japonica*.

Żona Zofia pisała do Karla Zellera w dniu 9 września 1990 roku, w odpowiedzi na jego list do Władysława Orlicza z 25 sierpnia 1990 roku:

> *Mój mąż zmarł 09.8. wieczorem, nagle i zupełnie wiespodziwanie, gdyż czuł się dobrze, był w bardzo dobrym nastroju, robił korektę do japońskiego czasopisma, cieszył się, że ta korekta tak prędko przyszła. Pogrzeb odbył się 17.8. i teraz zostałam zupełnie sama i bardzo jest mi źle, ciężko i smutno. (...) Dziś mijają cztery tygodnie, stracił przytomność około godziny 9-ej wieczorem, odszedł o godz. 10.50 w szpiatlu.*

Śmierć Władysława Orlicza, postaci legendarnej już za życia, członka Lwowskiej Szkoły Matematycznej, współtwórcy jej potęgi i ponadczasowych dokonań, była ogromną stratą dla nauki polskiej i światowej. Żyje on wciąż w pamięci swoich uczniów i następców.

2. Dorobek naukowy Orlicza oraz nazwisko ORLICZ-a w matematyce

Władysław Orlicz napisał 176 prac naukowych, 2 podręczniki szkolne:

1. S. Kubrakiewicz i W. Orlicz, *Rachunki do I klasy szkoły powszechnej* , Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1937, 92 strony.
2. A. Frejlich i W. Orlicz, *Matematika dlya klyasi serednikh zagal'no-osvitnikh shkil*, Państwowe Wydawnictwo Książek Szkolnych we Lwowie 1938, 168 stron (po ukraińsku).

i monografię:

3a. W. Orlicz, *Liniowa Analiza Funkcjonalna*, Peking 1963, 138 stron (po chińsku).

3b. W. Orlicz, *Linear Functional Analysis*, angielskie tłumaczenie z chińskiego książki [3a] przez Lee Peng Yee, Series in Real Analysis 4, World Scientific, Singapore 1992, 262 strony.

Dwa podręczniki szkolne sprzed wojny, pokazują fakt przywiązywania przez Orlicza dużej wagi do spraw dydaktycznych.

Mówiąc o książkach Władysława Orlicza trzeba jeszcze raz wspomnieć o jego *Dziełach Zebranych* wydanych przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe w dwóch tomach w 1988 roku jako *Władysław Orlicz, Collected Papers. I, II.* With contributions by Wanda Matuszewska and Lech Maligranda, oraz o rekonstrukcji książki Banacha *Wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej*, Monografie Matematyczne, Tom 17, Warszawa-Wrocław 1951. Ta ostatnia książka była przygotowywana do publikacji już przed wojną, w drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego, ale w wyniku działań wojennych zniszczony został rękopis i część gotowego już składu. Orlicz i Alexiewicz uzupełnili brakujące fragmenty tekstu.

Trzeba jeszcze odnotować, że Orlicz planował napisanie książki *Ćwiczenia i zagadnienia analizy matematycznej*, gdyż zachował się jednostronicowy konspekt z 1 marca 1954 roku z takimi planami. Ponadto w liście do Redakcji Polskiego Słownika Biograficznego z dnia 29 marca 1965 r., w związku z korektą noty biograficznej o Stefanie Kaczmarzu [110] pisał, że przed wojną wstępnie pracowali z Kaczmarzem nad książką matematyczną dla szkół wojskowych.

Z lat siedemdziesiątych zachowało się 106 stron pisanego maszynopisu po niemiecku książki Orlicza *Saksräume und ihre Anwendungen.* Niestety materiał ten nie został opublikowany.

Naukowo Orlicz zajmował się teorią sumowalności, szeregami ortogonalnymi, analizą funkcjonalną, funkcjami rzeczywistymi, teorią miary i równaniami różniczkowymi. Był on twórcą przestrzeni funkcji oraz ciągów, nazwanych po latach *przestrzeniami Orlicza.* Uogólniają one znane przestrzenie F. Riesza (przestrzenie L^p).

W omówieniu dorobku naukowego Orlicza skupimy uwagę przede wszyskim na tych jego wynikach, które trafiły do klasyki, do kanonu wiedzy matematycznej i przyniosły ich autorowi największe uznanie. Wyników takich jest niemało i konieczna jest ich selekcja. Wybór oczywiście jest subiektywny.

Dorobek naukowy Orlicza można podzielić na kilka grup tematycznych:

A. Przestrzenie Orlicza.
B. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne.
C. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa.
D. Teoria sumowalności.
E. Funkcjonały ortogonalnie addytywne, przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza.
F. Operatory wielomianowe i analityczne.
G. Funkcje wektorowe: mierzalność, różniczkowanie i analityczność.
H. Indeksy Matuszewskiej-Orlicza.
I. Interpolacja operatorów.
J. Równania różniczkowe — twierdzenia generyczne.
K. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji.

W każdej powyższej grupie tematycznej wypiszę rezultaty lub określenia zawierające nazwisko Orlicza. Omówienie kończy się listą monografii i artykułów przeglądowych, w których znaleźć można szersze komentarze dotyczące znaczenia badań Orlicza i rozwoju jego idei. Pozycje te cytowane są w tekście z użyciem symbolu złożonego z pierwszych liter autora bądź autorów oraz często ostatnich dwóch cyfr roku opublikowania. Natomiast prace Orlicza numerowane są zgodnie z ich spisem zamieszczonym w dalszej części 6b artykułu.

A. Przestrzenie Orlicza

W 1910 roku F. Riesz wprowadził do analizy przestrzenie $L^p[a,b] = L^p$ i ℓ^p, które odgrywają ważną rolę w różnych działach analizy. Przynależność funkcji x do L^p określa warunek

$$I_\varphi(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|)dt < \infty,$$

gdzie $\varphi(u) = u^p$, $p \geqslant 1$. Niemal natychmiast podjęto próby zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszymi funkcjami φ. Za wyjściową można uznać pracę W. H. Younga z 1912 roku zawierającą pewną nierówność funkcyjną, która z czasem trafiła do klasyki z nazwiskiem jej odkrywcy. W 1928 roku Kaczmarz i Nikliborc [KN28] badali, za Paulem Noaillonem (którego rozważania nie zostały opublikowane) zbieżność ciągu funkcji f_n do funkcji f w następującym sensie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(|f_n(t) - f(t)|)dt = 0.$$

Wykazali oni szereg twierdzeń dotyczących takiej uogólnionej zbieżności. Uogólnieniami przestrzeni L^p zajęli się w końcu lat dwudziestych R. Cooper i J. C. Burkill. Ten ostatni opublikował następujące twierdzenie ([Bu28]): dla dowolnej funkcji x spełniającej warunek $I_\varphi(x) < \infty$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa s dla której zachodzi $I_\varphi(x - s) < \varepsilon$. Praca Burkilla zainteresowała Zygmunta Birnbauma i Władysława Orlicza. Dowiedli oni w [8], że to twierdzenie (oraz jego wariant z funkcją ciągłą zamiast s) nie jest prawdziwe w ogólności, ale jest prawdziwe gdy φ spełnia tzw. *warunek* Δ_2 *dla dużych* u, tj. $\varphi(2u) \leqslant C\varphi(u)$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz $u \geqslant u_0 \geqslant 0$ (gdy nierówność zachodzi odpowiednio w pewnym prawostronnym otoczeniu zera lub w całej dziedzinie, to mówi się o *warunku* Δ_2 *dla małych* u i odpowiednio o *warunku* Δ_2 *dla wszystkich* u).

W kolejnej pracy [9] Birnbaum i Orlicz rozważali funkcje ciągłe $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazwane N'-*funkcjami*, od których wymagali, aby: $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ oraz $\lim_{u\to 0^+} \varphi(u)/u = 0$, $\lim_{u\to\infty} \varphi(u)/u = \infty$ (warunki graniczne będą później znane jako warunki 0_1 i ∞_1). Z N'-funkcją φ związali też inną N'-funkcję φ^* równością

$$\varphi^*(v) = \sup_{u\geqslant 0}\{uv - \varphi(u)\}. \tag{1}$$

O funkcji φ^* mówi się dzisiaj *funkcja dopełniająca* (lub *sprzężona*) do φ. Równość (1) implikuje oczywistą uogólnioną nierówność Younga: $uv \leqslant \varphi(u) + \varphi^*(v)$.

W przypadku wypukłej funkcji φ Birnbaum i Orlicz uzyskują całkowe reprezentacje $\varphi(u) = \int_0^u p(t)dt$ i $\varphi^*(v) = \int_0^v p^{-1}(t)dt$, gdzie p^{-1} jest funkcją odwrotną (w sensie uogólnionym) do p. Tym samym otrzymali też klasyczną nierówność Younga.

Odnotujmy tutaj, że liczni specjaliści z analizy wypukłej przypisują zdefiniowanie wzorem (1) funkcji sprzężonej S. Mandelbrojtowi, przytaczając pewną jego pracę z roku 1939, pracę o 8 lat późniejszą od publikacji Birnbauma i Orlicza. W [9] zostało też wprowadzone pojęcie równoważności N'-funkcji φ, ψ: istnieją stałe dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a\varphi(bu) \leqslant \psi(u) \leqslant c\varphi(du),$$

przy czym żąda się zachodzenia nierówności bądź w otoczeniu nieskończoności (wtedy mówi się o równoważności funkcji dla dużych u), bądź w otoczeniu zera (równoważność dla małych u), bądź dla $u \in [0, \infty)$ (równoważność dla wszystkich u). Praca [9] zawiera ponadto wyniki badań zbiorów

$$L_0^\varphi = \{x : I_\varphi(x) < \infty\}, \quad \ell_0^\varphi = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|) < \infty\},$$

które prowadzą m.in. do uogólnienia znanego twierdzenia Landau'a: dla $p, q \geqslant 1$ zachodzi $x\ell^p \subset \ell^1 \Leftrightarrow x \in \ell^q$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Birnbaum i Orlicz nie analizowali jednak rozpatrywanej problematyki z punktu widzenia teorii przestrzeni Banacha. Ten kierunek podjął Orlicz w roku 1932 publikując pracę [13], którą uznać wypada za *pierwszy* artykuł traktujący o liniowo-topologicznych własnościach klasy L_0^φ z *wypukłą* funkcją φ spełniającą warunek Δ_2 (przy tym ostatnim założeniu L_0^φ jest przestrzenią liniową). Orlicz zauważył, że równość

$$\|x\|_\varphi^0 = \sup\{\int_a^b |x(t)y(t)|dt : \int_a^b \varphi^*(|y(t)|dt \leq 1\}$$

definiuje normę na L_0^φ. Norma ta zwana jest dzisiaj *normą Orlicza*.

Już w roku 1936 Orlicz zajął się sytuacją ogólniejszą. W pracy [27] zrezygnował z warunku Δ_2 i rozważał przestrzeń liniową

$$L^\varphi[a, b] = L^\varphi = \{x : I_\varphi(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego od } x\}, \tag{2}$$

a następnie udowadnił zupełność przestrzeni $(L^\varphi, \|\cdot\|_\varphi^0)$. Trzeba tu zwrócić uwagę na fakt, że $L^\varphi = L_0^\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek Δ_2 (dla dużych u). Przestrzenie określone równością (2) znane są obecnie jako *przestrzenie Orlicza*. Artykuł [27] zawiera też badania *ciągowych przestrzeni Orlicza*

$$\ell^\varphi = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda|x_n|) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego od } x\},$$

a także następujące

Twierdzenie (Orlicz, 1936).

(a) *Zbieżność* $\|x_n - x\|_\varphi^0 \to 0$ *jest równoważna warunkowi* $I_\varphi(\lambda(x_n - x)) \to 0$ *dla każdego* $\lambda > 0$.

Jeżeli φ *spełnia warunek* Δ_2 *dla dużych* u, *to:*

(b) *Przestrzeń* $L^\varphi[a, b]$ *jest ośrodkowa, co więcej, układ Haara jest bazą w* $L^\varphi[a, b]$.

(c) *Przestrzeń sprzężona do* $L^\varphi[a, b]$ *jest izomorficzna z* $(L^{\varphi^*[a,b]}, \|\cdot\|_{\varphi^*}^0)$.

(d) *Przestrzeń* $L^\varphi[a, b]$ *jest refleksywna o ile* φ^* *także spełnia warunek* Δ_2.

Obiekty L^φ, L_0^φ wzbudziły zainteresowanie już przed drugą wojną światową. Wspominane są w monografiach S. Banacha [Ba32] (uwagi do wstępu, przykład 13) i A. Zygmunda [Zy35]. Wydaje się, iż termin *przestrzenie Orlicza* po raz pierwszy pojawił się w przeoczonej przez wielu specjalistów pracy M. Morse'a i W. Transue z roku 1950 (patrz [MM50], str 595). Użyli go też M. A. Krasnoselskiĭ i Ya. B. Rutickiĭ w artykule [KK51] z roku 1951 oraz A. C. Zaanen w publikacji [Za52] z roku 1952, a potem w monografii [Za53] z roku 1953.

Udzielając wywiadu dla tygodnika ,,Wprost" (wywiad ukazał się 6 listopada 1983 roku [B83]) na pytanie ,, jak powstały pana przestrzenie", Orlicz odpowiedział:

Byłem, jako stypendysta, w sławnym centrum matematycznym Göttingen. Razem z kolegą Birnbaumem studiowaliśmy prace matematyków angielskich. Zuważyliśmy w nich różne błędy, wiedzieliśmy, że można lepiej to zrobić. Opublikowaliśmy pierwszą pracę. Tak się zaczęło. Później nastąpiła ogromna fala analizy funkcjonalnej, już we Lwowie. Wtedy napisałem moją pierwszą pracę na temat nowego rodzaju przestrzeni funkcyjnych, nazwanych z biegiem czasu moim nazwiskiem. Jeżeli w ogóle idzie o tę analizę, to nie mieliśmy konkurencji w tym czasie na całym świecie. Co innego teraz. Wszystko się rozrosło, jest straszliwa konkurencja. Pracuje się nad czymś i nigdy nie wiadomo czy nie zostało to już dawno gdzieś w Australii, Francji czy Japonii zrobione. Trudność polega także na tym, że problemy są coraz bardziej wyrafinowane, coraz bardziej są skomplikowane zagadnienia.

Dokładniej wyglądało to tak, że Orlicz z kolegą ze Lwowa Z. W. Birnbaumem spotkali sie w 1930 roku w Getyndze i napisali dwie prace [8] i [9]. W pierwszej, z roku 1931, poprawili błąd w pracy J. C. Burkilla z 1928 roku w twierdzeniu o aproksymacji. W drugiej, 68 stronicowej pracy z 1931 roku Birnbaum i Orlicz uogólnili twierdzenie Landaua (był to wielki matematyk, którego poznali właśnie w czasie pobytu w Getyndze). Ale przestrzeni nadal tam nie było. Dopiero w pracy Orlicza z 1932 roku, i później w pełnej ogólności w roku 1936, pojawiły się nowe przestrzenie. To było przyczyną dlaczego termin *przestrzenie Orlicza* pojawił się dopiero w pracy Morse i Transue z 1950 roku i następnie w pracy [Za52] oraz książce Zaanena [Za53] z 1953 roku.

Na upowszechnienie terminu *przestrzenie Orlicza* znaczny wpływ miała oprócz książka Zaanena [Za53], wydana w 1958 roku monografia matematyków radzieckich z Woroneża, Krasnoselskiego i Rutickiiego [KR58], a szczególnie jej angielskie tłumaczenie z 1961 roku. Przestrzenie Orlicza stały się wkrótce obiektem badań na całym świecie i znalazły liczne zastosowania. Wspomnijmy, że czasami są wśród matematyków zwolennicy terminu przestrzenie Birnbauma-Orlicza (por. [Bu78] i [Wo97]), jednak obecnie, całkiem zresztą słusznie, przestrzenie te są związane tylko z nazwiskiem Orlicza.

Należy podkreślić, że Zaanen w pracy [Za52] rozważał przestrzenie L^φ generowane przez tzw. funkcje Younga φ, tzn. dopuszcza się przyjmowanie przez φ wartości 0 w otoczeniu zera i wartości $+\infty$ (wtedy przestrzeń L^∞ jest też przestrzenią typu L^φ). Tak ogólne założenia o φ przyjął również w swojej rozprawie doktorskiej [Lu55] z 1955 roku W. A. J. Luxemburg, który wykorzystywał następującą normę w L^φ:

$$\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant 1\}. \tag{3}$$

Jest ona równoważna normie $\|\cdot\|^0_\varphi$, gdyż $\|x\|_\varphi \leqslant \|x\|^0_\varphi \leqslant 2\|x\|_\varphi$. Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ nazwali normy $\|\cdot\|_\varphi, \|\cdot\|^0_\varphi$ odpowiednio *normami Luxemburga i Orlicza*. Nazwanie normy (3) normą Luxemburga jest nieuzasadnione, bo równość (3) występuje zarówno w pracy [MT50] oraz w monografii H. Nakano [Na50], a więc w publikacjach o 5 lat starszych od doktoratu Luxemburga. Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ w [KR58] podają, że

$$\|x\|^0_\varphi = \inf_{k>0} \frac{1 + I_\varphi(kx)}{k}. \tag{4}$$

Wyrażenie po prawej stronie jest tzw. normą Amemiyi $\|\cdot\|^A_\varphi$ rozważaną w książce Nakano cytowanej przez Krasnosielskiego i Rutickiego. Pozostaje więc zagadką, jak to się stało, że zauważając normę Amemiya Krasnoselskii i Rutickii przeoczyli równość (3).

Równość $\|x\|^0_\varphi = \|x\|^A_\varphi$ jest bardzo ważna z punktu widzenia geometrycznych własności przestrzeni Orlicza L^φ. Pozostaje ona prawdziwa także w sytuacji, gdy φ jest funkcją Younga (udowodniono to późno, bo dopiero Hudzik i Maligranda [HM00] zrobili to w 1999 roku). Uzupełniając informacje o postaciach norm w przestrzeniach L^φ przytaczamy następujący wynik Orlicza z pracy [97]:

Twierdzenie Orlicza (1961). *W przestrzeni Orlicza $L^\varphi(\mu)$ norma Luxemburga-Nakano $\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant 1\}$ jest równa*

$$\|x\|_\varphi = \inf_{k>0} \frac{max\ \{1, I_\varphi(kx)\}}{k}. \tag{5}$$

W pracach i monografii Zaanena oraz w książce Krasnoselskiego i Rutickiego po raz pierwszy zastosowano przestrzenie Orlicza w teorii liniowych i nieliniowych równań całkowych. Później zaczęto

wykorzystywać je także w teorii równań różniczkowych, konstruktywnej teorii funkcji i teorii aproksymacji, probabilistyce, statystyce matematycznej. Przestrzenie Orlicza znacznie rozszerzyły problematykę badawczą w porównaniu z przestrzeniami L^p choćby w zakresie własności geometrycznych. Zagadnienia różnych typów wypukłości, gładkości przestrzeni L^φ zainteresowały na długo znaczną liczbę matematyków (m.in. W. A. J. Luxemburga, H. W. Milnesa, B. A. Akimovicha, M. M. Rao, S. L. Troyanskiego, K. Sundaresana, B. Turetta, H. Hudzika, A. Kamińską, J. E. Jamisona, P.-K. Lina, S. Chena, T. Wanga, Y. Wanga, C. Wu, W. Kurca, R. Płuciennika, Y. Cui, B.-L. Lina).

Idea zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszą została przeniesiona na inne typy przestrzeni funkcyjnych. Zaczęto z powodzeniem rozwijać wielokierunkowe badania znanych dziś szeroko przestrzeni Besicovicha-Orlicza, Hardy'ego-Orlicza, Lipschitza-Orlicza, Lorentza-Orlicza, Marcinkiewicza-Orlicza, Orlicza-Sobolewa, Orlicza-Zygmunda. Tematyka badawcza związana z przestrzeniami Orlicza podejmowana była i jest przez nierzadko wybitnych specjalistów skupionych w licznych ośrodkach w różnych punktach globu. Wśród nich wymienić należy:

— Sapporo, gdzie rozwijano głównie ogólną teorię przestrzeni modularnych i poświęcono sporo uwagi przestrzeniom Orlicza stanowiącym bardzo ważny typ przestrzni modularnych; działali tu przede wszystkim: H. Nakano, I. Amemiya, T. Ando, T. Shimogaki, S. Yamamuro, S. Koshi, J. Ishii,

— Woroneż, w którym zajmowano się operatorami liniowymi i nieliniowymi w przestrzeniach L^φ i stosowano te przestrzenie do problemów równań całkowych, rozważano znacznie ogólniejsze przestrzenie symetryczne i zagadnienia interpolacji operatorów; do tej grupy należeli m.in.: M. A. Krasnoselskiĭ, Ya. B. Rutickiĭ, E. I. Pustylnik, D. V. Salekhov, E. M. Semenov, V. I. Sobolev, P. P. Zabreiko, a współpracowali z nimi I. V. Shragin, M. M. Vainberg i G. Ya. Lozanovskiĭ,

— Leiden, miejsce szczególnie ważnych badań nad kratami liniowymi i przestrzeniami Banacha funkcji mierzalnych (w tym przestrzeni Orlicza) prowadzonych przez A. C. Zaanena, W. A. J. Luxemburga, W. J. Classa J. J. Groblera, E. de Jonge, B. de Pagtera, A. R. Schepa, W. K. Vietscha,

— Poznań skupiający liczne grono wychowanków Władysława Orlicza i Juliana Musielaka oraz ich uczniów (J. Albrycht, L. Drewnowski, P. Foralewski, H. Hudzik, A. Kamińska, P. Kolwicz, P. Kranz, W. Kurc, I. Labuda, R. Leśniewicz, L. Maligranda, M. Mastyło, W. Matuszewska, M. Nawrocki, M. Nowak, R. Płuciennik, St. Stoiński, R. Taberski, R. Urbański, A. Waszak, M. Wisła, W. Wnuk). Podjęli oni zagadnienia geometrycznych i strukturalnych własności przestrzeni Orlicza i ich ogólniejszego wariantu (przestrzenie Musielaka-Orlicza), a także interpolacji operatorów, przestrzeni Hardy'ego-Orlicza i przestrzeni modularnych. Ta problematyka była również rozpatrywana przez matematyków francuskich: Ph. Turpina i E. Ginera,

— Jerozolima, gdzie uzyskano ważne twierdzenia dotyczące izomorficznej i lokalnej struktury przestrzeni Orlicza; autorami tych twierdzeń są m.in.: J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Z. Altshuler, K. J. Lindberg. Powyższa tematyka była kontynuowana, ze znakomitymi rezultatami, przez N. J. Nielsena, N. J. Kaltona, J. Y. T. Woo oraz matematyków hiszpańskich: F. L. Hernándeza, B. Rodríguezа-Salinasa i C. Ruiza,

— Harbin, znany przede wszystkim z wielu wyników z zakresu geometrii przestrzeni funkcyjnych uzyskanych przez S. Chena, Y. Cui, Y. Duana, Z. Shi, H. Sun, T. Wanga, Y. Wanga, Z. Wanga, C. Wu.

Orlicz wielokrotnie powracał do tematyki przestrzeni L^φ, której poświęcone są prace [78], [81], [85], [93], [94], [96], [98], [112], [125], [154], [172]. Interesował się też bardzo przestrzeniami wyznaczonymi przez *niewypukłe* funkcje φ. Najczęściej przyjmowanymi przez niego założeniami o funkcji $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ były: ciągłość, nieograniczoność, niemalenie oraz $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Funkcje takie określa się mianem *funkcji Orlicza* lub *φ-funkcji*.

Efektem współpracy ze Stanisławem Mazurem jest artykuł [78], gdzie podano warunki konieczne i dostateczne liniowości zbioru L_0^φ przy bardzo ogólnych założeniach o φ (nie żądano ani ciągłości ani monotoniczności), a ponadto dyskutowano możliwość wprowadzenia odpowiedniej F-normy w takich przestrzeniach. Właściwą okazała się *F-norma Mazura-Orlicza*

$$|x|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}.$$

Co więcej autorzy pracy [78] stwierdzili, że L^φ można wyposażyć w normę zupełną $\|\cdot\|$ o własności $\|x_n\| \to 0 \Rightarrow I_\varphi(x_n) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej.

Pierwotnie przestrzenie L^φ określono jako przestrzenie pewnych funkcji na przedziale i całka definiująca funkcjonał I_φ była całką względem miary Lebesgue'a. Oczywiście można, i często tak się czyni, rozpatrywać przestrzenie Orlicza nad dowolną miarą μ:

$$L^\varphi(\mu) = \{x \in L^0(\mu) : I_\varphi(\lambda x) = \int_\Omega \varphi(\lambda|x(t)|)d\mu < \infty \text{ dla } \quad \text{pewnego } \lambda > 0\},$$

gdzie $L^0(\mu)$ jest przestrzenią klas równoważności, względem równości μ-prawie wszędzie, funkcji rzeczywistych (lub zespolonych) mierzalnych względem σ-algebry podzbiorów zbioru Ω, na której zadana jest miara μ. Własności miary μ nie pozostają bez wpływu na własności przestrzeni $L^\varphi(\mu)$. Ważne są tu trzy typy miar: bezatomowa i nieskończona, bezatomowa i skończona oraz miara licząca na zbiorze potęgowym zbioru liczb naturalnych. Dla każdego z tych przypadków istotne jest zachowanie się funckji φ odpowiednio: w całej dziedzinie, w otoczeniu nieskończoności, w otoczeniu zera. Na potwierdzenie tego faktu zacytujemy następujące twierdzenie podane w [78]:

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1958). *Jeżeli miara μ jest bezatomowa i skończona (licząca), to przestrzeń $L^\varphi(\mu)$ jest lokalnie wypukła, wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej w pewnym otoczeniu nieskończoności (zera).*

Przestrzenie Orlicza to już klasyczne przykłady przestrzeni Banacha. Świadczyć o tym mogą następują dane zaczerpnięte z *Mathematical Reviews (MathSciNet* z lat 1940 - 2008), gdzie termin *przestrzeń Orlicza* pojawił się w tytułach prac ponad 1.100 razy, a w tytułach lub streszczeniach 2.500 razy (termin *przestrzeń Banacha* pojawił się: 12.450 i 50.700 razy, odpowiednio).

Monografie o przestrzeniach Orlicza jakie zostały dotychczas opublikowane to (chronologicznie): Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ [KR58], Lindenstrauss i Tzafriri [LT77, 79], Musielak [Mu83], Wu i Wang [WW83], Maligranda [Mal89], Rao i Ren [RR91], Chen [C96] oraz Rao i Ren [RR02].

Na zakończenie **anegdota** związana z ,,przestrzeniami Orlicza":
Profesor Orlicz złożył podanie o przydział w Poznaniu większego mieszkania.
Urzędnik odpowiedział: Nie możemy spełnić Pańskiej prośby o większe mieszkanie
przecież Pan ma **własne przestrzenie !!!**.

B. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne

Przypomnijmy, że jeśli τ jest topologią na przestrzeni liniowej X, to szereg $\sum_1^\infty x_n$ elementów tej przestrzeni nazywa się:

- *bezwarunkowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy z szeregów $\sum_1^\infty x_{\pi(n)}$, gdzie π oznacza dowolną permutację zbioru liczb naturalnych,
- *podszeregowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy podszereg $\sum_1^\infty x_{n_k}$, gdzie (n_k) jest dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych.

Orlicz używał terminu ,,szereg doskonale zbieżny" zamiast ,,szereg podszeregowo zbieżny". Wiedział on, że w przestrzeniach Banacha zbieżność bezwarunkowa i podszeregowa w topologii normowej pokrywają się (fakt ten opublikował dość późno, bo dopiero w roku 1933). Zainicjował też, trwające przez wiele lat, badania związków między różnymi rodzajami zbieżności szeregów w różnych topologiach, najwięcej uwagi poświęcając właśnie zbieżności bezwarunkowej i podszeregowej. W pracy [5] z roku 1929 sformułował następujące twierdzenie:

Twierdzenie Orlicza (1929). *Szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w ciągowo słabo zupełnej przestrzeni Banacha X, wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla wszystkich liniowych i ciągłych funkcjonałów x^* na X.*

Analizując dowód powyższego twierdzenia zauważył możliwość opuszczenia założenia ciągowej słabej zupełności przy równoczesnej konieczności zastąpienia warunku $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ silniejszym założeniem podszeregowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ w słabej topologii (w klasie ciągowo słabo zupełnych przestrzeni Banacha pojęcia te są równoważne). Fakt ten został przedstawiony w trakcie jednego

ze spotkań lwowskich matematyków, ale Orlicz nie zdecydował się na opublikowanie ulepszonej wersji twierdzenia, nie doceniając wówczas pełnej jego wartości. Twierdzenie Orlicza w zmienionej wersji wypłynęło prawie dziesięć lat później w jednej z prac B. J. Pettisa.

Twierdzenie Orlicza-Pettisa (Orlicz 1929; Pettis 1939). *Szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny (w topologii normy), wtedy i tylko wtedy, gdy jest podszeregowo zbieżny w słabej topologii.*

Pettis przedstawił dowód twierdzenia Orlicza w pełnej ogólności, powiązał je z teorią miar wektorowych i podał następujące równoważne sformułowanie:

Jeżeli miara określona na σ-algebrze jest przeliczalnie addytywna w topologii słabej, to jest przeliczalnie addytywna w topologii normowej.

Ze względu na to, że Pettis formalnie jako pierwszy podał dowód omawianego twierdzenia w pełnej ogólności, a zwłaszcza wskazał jego interesujące konsekwencje, weszło ono do literatury pod nazwą *twierdzenia Orlicza-Pettisa.* Różne warianty i uogólnienia twierdzenia Orlicza-Pettisa formułowane były i są często właśnie w języku miar. Dzisiaj wiadomo, że twierdzenie Orlicza-Pettisa pozostaje prawdziwe w klasach przestrzeni lokalnie wypukłych i niektórych typach F-przestrzeni nielokalnie wypukłych (np. w F-przestrzeniach z bazą Schaudera). Znane są przykłady F-przestrzeni, w których twierdzenie Orlicza-Pettisa nie zachodzi (M. Nawrocki, 1987, 1990).

Orlicza zajmowało też zagadnienie związków między zbieżnościami podszeregowymi dla innych par topologii niż słaba i normowa i to niekoniecznie zadanych na przestrzeni Banacha (taką naturalną parę tworzą np. w F-przestrzeniach funkcji mierzalnych, topologia zbieżności wg miary i oryginalna topologia metryczna). Twierdzenia typu Orlicza-Pettisa formułowane są dla szeregów w grupach topologicznych. Najbardziej znane uogólnienia w tym kierunku zostały dokonane przez N. J. Kaltona, który pokazał, że w przypadku topologicznych grup polskich podszeregowa zbieżność w dowolnej słabszej topologii grupowej pociąga takąż zbieżność w topologii oryginalnej. Warto dodać, że wyniki Kaltona zostały w istotny sposób rozszerzone m.in. przez Lecha Drewnowskiego i Iwo Labudę, uczniów Profesora. W ostatnich latach opublikowali oni ponadto warianty twierdzenia Orlicza-Pettisa dla szerokich klas topologicznych krat liniowych.

Orlicz zauważył równoważność warunków

1° $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego x^*,

2° $\{\sum_{n\in F} x_n : F \subset \mathbb{N},\ F$ skończony$\}$ jest zbiorem ograniczonym.

Tak więc warunek występujący w pierwotnej wersji twierdzenia Orlicza-Pettisa okazuje się być równoważnym warunkowi nieodwołującemu się do przestrzeni dualnej. Szereg $\sum_1^\infty x_n$ z ograniczonym zbiorem wszystkich skończonych sum swoich wyrazów nazwał Orlicz *doskonale ograniczonym* (obecnie, w odniesieniu do przestrzeni Banacha mówi się: „(x_n) jest słabo bezwarunkowo Cauchy'ego"). Orlicz interesował się przez wiele lat *przestrzeniami* (również nielokalnie wypukłymi) *z własnością* (O), *tzn. takimi przestrzeniami, w których szereg doskonale ograniczony jest podszeregowo zbieżny.* Twierdzenie Orlicza-Pettisa pokazuje, że ciągowo słabo zupełne przestrzenie Banacha mają własność (O). Innymi przykładami przestrzeni z tej klasy wskazanymi przez Orlicza są przestrzenie Musielaka-Orlicza z normą porządkowo ciągłą (w tym przestrzenie L^p dla $0 < p < 1$ i przestrzeń $L^0[0,1]$ funkcji Lebesgue'a mierzalnych z topologią zbieżności wg miary). Czesław Bessaga i Aleksander Pełczyński pokazali w roku 1958, iż przestrzeń Banacha ma własność (O), wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni c_0. Powyższa charakteryzacja pozostaje prawdziwa dla ciągowo zupełnych przestrzeni lokalnie pseudowypukłych oraz dla bardzo szerokiej rodziny topologicznych krat liniowych (niedawne wyniki L. Drewnowskiego i I. Labudy).

Innym, klasycznym już dzisiaj twierdzeniem autorstwa Orlicza jest następujący wynik z roku 1933:

Twierdzenie (Orlicz, 1933). *Jeżeli szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w $L^p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$, to $\sum_1^\infty \|x_n\|^{max(2,p)} < \infty$.*

Przestrzenie Banacha, w których dla każdego szeregu bezwarunkowo zbieżnego $\sum_1^\infty x_n$ zachodzi $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ nazwano *przestrzeniami z własnością Orlicza.* Mają ją oczywiście przestrzenie L^p dla $1 \leqslant p \leqslant 2$, a ogólniej przestrzenie Banacha kotypu 2. Dość długo nie było wiadomo, czy własność Orlicza danej przestrzeni X implikuje, że jest ona kotypu 2. T. Figiel i G. Pisier pokazali prawdziwość tej implikacji przy założeniu izomorficzności X z sumą prostą tejże przestrzeni w sensie ℓ^p dla pewnego

$p \in [1,2]$. W latach 1992 i 1994 M. Talagrand wskazał kraty Banacha (w tym przestrzeń symetryczną) z własnością Orlicza, ale kotypu różnego od dwójki.

Związek bezwarunkowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ i jego absolutnej zbieżności (tj. zbieżności szeregu $\sum_1^\infty \|x_n\|$) interesował Orlicza już w końcu lat dwudziestych. Wpisał on, wraz ze S. Mazurem, do Księgi Szkockiej pytanie (nr 122) o istnienie w dowolnej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru szeregu bezwarunkowo zbieżnego i równocześnie absolutnie rozbieżnego. Odpowiedź pozytywną dali w 1950 roku A. Dvoretzky i C. R. Rogers.

Orlicz miał znaczące osiągnięcia w badaniach szeregów funkcyjnych, a zwłaszcza szeregów ortogonalnych, które stanowiły temat jego rozpraw doktorskiej i habilitacyjnej [22]. Mówiąc ,,szereg ortogonalny" ma się na myśli szereg $\sum_1^\infty \varphi_n(\cdot)$ funkcji mierzalnych $\varphi_n(\cdot)$ określonych na $(0,1)$ tworzących układ ortonormalny, tzn. spełniających warunek $\int_0^1 \varphi_k(s)\varphi_m(s)ds = \delta_{km}$. Do powszechnie znanych i często przytaczanych twierdzeń autorstwa Orlicza należą m.in. twierdzenia o mnożnikach Weyla dla bezwarunkowej zbieżności oraz o osobliwościach Carlemana i Littlewooda układów ortogonalnych, zamieszczone w pracach [2], [15], [21] i [28]. On też jako pierwszy podał warunek dostateczny bezwarunkowej zbieżności szeregu postaci $\sum_1^\infty a_n\varphi_n(\cdot)$.

Twierdzenie Orlicza o mnożnikach Weyla (1927). *Niech (a_k) będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli istnieje rosnący do nieskończoności ciąg liczbowy (w_k) taki, że dla pewnego podciągu (w_{k_n}) mamy*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{w_{k_n}} < \infty, \quad \sup_k \frac{\log k_{n+1}}{\log k_n} < \infty \quad \textit{oraz} \quad \sum_1^\infty a_k^2 (\log k)^2 w_k < \infty,$$

to $\sum_1^\infty a_k\varphi_k(x)$ jest bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie.

Rezultaty K. Tandori'ego (1962) pokazały, że założenia przyjęte w powyższym twierdzeniu są niemal optymalne.

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Carlemana. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest dowolnym nieskończonym układem ortonormalnym funkcji wspólnie ograniczonych, to istnieje funkcja ciągła, której współczynniki Fouriera a_n względem tego układu spełniają warunek $\sum_1^\infty |a_n||p_n| = \infty$. W szczególności istnieje funkcja ciągła o własności $\sum_1^\infty |a_n|^{2-\varepsilon} = \infty$ dla każdego $\varepsilon > 0$.*

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Littlewooda. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest nieskończonym układem ortogonalnym, złożonym ze wspólnie ograniczonych funkcji ciągłych, gęstym w $C[0,1]$, to dla prawie wszystkich układów znaków ± 1 szereg $\sum_1^\infty \pm p_n\varphi_n(x)$ nie jest rozwinięciem żadnej funkcji z $L^1[0,1]$.*

Orlicz pokazał ponadto, że *dla dowolnego zupełnego układu ortogonalnego $(\varphi_n(\cdot))_{n=1}^\infty$ na $(0,1)$ mamy $\sum_1^\infty \varphi_n^2(s) = \infty$ dla prawie wszystkich s.*

Inny kierunek zainteresowań Orlicza to badanie własności zbioru ciągów będących współczynnikami Fouriera (względem ustalonego układu ortogonalnego) funkcji należących do danej przestrzeni.

Wielką wartość i znaczenie prac Orlicza nad szeregami funkcyjnymi podkreślają w komentarzach Kashin i Saakjan [KS84]. Czynią to także R. S. Gutjer i P. L. Uljanov, których obszerny artykuł przeglądowy wzbogacił rosyjskie tłumaczenie książki Kaczmarza i Steinhausa [KS58]. Wielokrotnie do wyników Orlicza odwołują się również Kaczmarz i Steinhaus w książce *Theorie der Orthogonalreihen* [KS58] i Sikorski w książce [Si59].

Zacytujmy na koniec monografie bądź ważne prace o szeregach i bezwarunkowej zbieżności w przestrzeniach Banacha (alfabetycznie): Diestel [D84], Diestel i Uhl [DU77], Drewnowski [D00], Filter i Labuda [FL91], Kaczmarz i Steinhaus [KS58], M. I. Kadets i V. M. Kadets [KK97], Kalton [K80], Kashin i Saakjan [KS84], Sikorski [S59], Uljanov [U78], Wojtaszczyk [W91].

C. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa

Władysław Orlicz zajmował się również ogólną teorią przestrzeni F-unormowanych (=metryzowalnych przestrzeni liniowo-topologicznych). Współpracując ze Stanisławem Mazurem uzyskał wyniki o

fundamentalnym znaczeniu dla tej teorii. Do najznamienitszych należy przeniesienie *zasady jednostajnej ograniczoności* (= twierdzenie Banacha–Steinhausa) na rodziny operatorów odwzorowujących F-przestrzenie (= zupełne przestrzenie F-unormowane) w przestrzenie F-unormowane. Zasada jednostajnej ograniczoności, w takim właśnie stopniu ogólności, udowodniona została w artykule [20] dla ciągów operatorów. Jej sformułowanie jest następujące:

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1933) lub zasady jednostajnej ograniczoności w przestrzeniach F-unormowanych:

Jeżeli $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ są ciągłymi operatorami liniowymi z F-przestrzeni X do przestrzeni F-unormowanej Y oraz zbiór $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony w Y dla dowolnego $x \in X$, to operatory T_n są jednakowo ciągłe. Gdy ponadto ciąg (T_n) jest punktowo zbieżny, to operator graniczny jest ciągły.

Zasada jednostajnej ograniczoności jest dzisiaj zwykle formułowana dla dowolnej rodziny operatorów (T_α) w postaci równoważności: punktowa ograniczoność $\Leftrightarrow$ jednakowa ciągłość (implikację $\Leftarrow$ łatwo jest zauważyć).

W pracy [20] opublikowano po raz pierwszy, pochodzący od Banacha, warunek równoważny ograniczoności podzbioru A przestrzeni F-unormowanej: $t_n a_n \to 0$ dla dowolnych ciągów $(a_n) \subset A$, $t_n \to 0$. Wykazano również klasyczne dzisiaj twierdzenie:

Twierdzenie o rezonansie (Mazur-Orlicz, 1933). *Jeżeli ciąg (T_n) ciągłych operatorów działających między F-przestrzeniami X, Y jest taki, że:*

(i) $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony dla wszystkich $x \in X$,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *istnieje dla elementów x pewnego zbioru liniowo gęstego w X,*

to $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ istnieje dla wszystkich $x \in X$ oraz operator T jest liniowy i ciągły.

Przytoczone powyżej twierdzenia, często opatrzone komentarzem podkreślającym ich znaczenie, znajdują się w każdej monografii i podręczniku poświęconym analizie funkcjonalnej. Komentarzy takich nie brakuje i w, używając medialnego żargonu, ,,kultowej" monografii Dunforda i Schwartza [DS58], gdzie odnotowano ogólny wariant *zasady zagęszczania osobliwości* wykazany przez Orlicza w [25]:

Zasada zagęszczania osobliwości (Orlicz, 1935). *Niech $T_{nm}(\cdot, \alpha)$ oznacza ciąg podwójny ciągłych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha zależny od parametru α przebiegającego zupełną przestrzeń metryczną A i taki, że $T_{nm}(x, \cdot)$ są funkcjami ciągłymi przy każdym $x \in X$.*

Jeżeli dla dowolnego α nie istnieje $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} T_{nm}(x_\alpha, \alpha)$ dla jakiegoś $x_\alpha \in X$, to przy pewnym $x \in X$ granica ta nie istnieje również dla α należących do pewnego zbioru drugiej kategorii w A. Co więcej, zbiór elementów $x \in X$ o powyższej własności jest rezydualny w X.

Idee Mazura i Orlicza zainspirowały liczne dalsze badania kontynuowane m.in. przez Andrzeja Alexiewicza w [A49-51], pierwszego doktoranta Profesora Orlicza. Wiele szczegółów o kierunkach i rozwoju tych badań oraz wskazówek literaturowych znaleźć można u Drewnowskiego [D96], a także u Antosika i Swartza [AS85] oraz Swartza [Sw90] i [Sw96].

Mazur i Orlicz przyczynili się znacząco do rozwoju teorii przestrzeni Frécheta (= lokalnie wypukłych F-przestrzeni), które określane były przez nich jako przestrzenie B_0. Tematykę tę podjęli już w latach trzydziestych w związku z analizowaniem pól zbieżności metod sumowalności, ale wiele istotnych wyników ukazało się drukiem dopiero po drugiej wojnie światowej w pracach [47] i [56], wielokrotnie potem cytowanych. Opóźniona prezentacja tych rezultatów spowodowała, że niektóre z nich zostały niezależnie opublikowane przez innych matematyków (J. Dieudoneé, L. Schwartz). Artykuły [47] i [56] zawierają: ważne przykłady F-przestrzeni, które nie są normowalne (a nawet lokalnie wypukłe), warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego na loklanie wypukłej przestrzeni F-unormowanej, uogólnienie twierdzenia Hahna-Banacha. Ów warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego f ma postać $|f(x)| \leqslant K_{f,n}\, p_n(x)$, gdzie stała $K_{f,n}$ zależy od f i p_n, a p_n jest pewnym wyrazem ciągu półnorm (p_j) zadającego topologię lokalnie wypukłą przestrzeni F-unormowanej. Mazur i Orlicz pokazali też uniwersalność przestrzeni $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ (z topologią wprowadzoną przez rodzinę półnorm $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : |t| \leqslant n\}$) w klasie lokalnie wypukłych ośrodkowych F-przestrzeni — każda taka przestrzeń jest liniowo homeomorficzna z pewną podprzestrzenią w $C(\mathbb{R})$.

W pracy [56] znajduje się ponadto wariant zasady jednostajnej ograniczoności dla odwzorowań między przestrzeniami liniowymi Z z aksjomatycznie wprowadzoną zbieżnością. Jednym z tych aksjomatów był warunek

$$u_n \to 0 \text{ w } Z \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} u_{n_k}\right)_{m=1}^{\infty} \text{ zbieżny w } Z \text{ dla pewnego podciągu } (n_k).$$

Zbieżność spełniająca powyższą implikację nazwana została później K-zbieżnością i była z dużym powodzeniem badana przez matematyków katowickich (informacje na ten temat znajdują się u Antosika i Swartza [AS85]).

Znaczącym, ze względu na zastosowania, jest podane w [56] uogólnienie twierdzenie Hahna-Banacha. Uogólnienie to ma następującą postać:

Twierdzenie Mazura-Orlicza o nierównościach (1953) jako uogólnienie twierdzenie Hahna-Banacha:

Niech $\omega : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem subliniowym na rzeczywistej przestrzeni liniowej X oraz niech $u : T \to X$ i $\alpha : T \to \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami. Na to by istniał w X funkcjonał liniowy f taki, że

$$f(x) \leqslant \omega(x) \text{ dla } \quad \text{każdego } x \in X, \quad \alpha(t) \leqslant f(u(t)) \text{ dla } \quad \text{każdego } t \in T,$$

potrzeba i wystarcza aby nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha(t_k) \leqslant \omega\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(t_k)\right)$$

zachodziły dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnijmy, że przez funkcjonał subliniowy ω rozumie się funkcjonał subaddytywny i dodatnio jednorodny: $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$, $\omega(tx) = t\omega(x)$ dla $t \geqslant 0$.

Twierdzenie Mazura-Orlicza o nierównościach bywa formułowane w postaci równoważnej, określanej jako ,,twierdzenie o kanapce":

> *Jeżeli subliniowy funkcjonał ω na rzeczywistej przestrzeni liniowej X dominuje wklęsły funkcjonał ρ na wypukłym zbiorze $K \subset X$, tzn. $\rho(x) \leqslant \omega(x)$ dla $x \in K$, to wtedy istnieje funkcjonał liniowy f na X taki, że $\rho(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in K$ oraz $f(x) \leqslant \omega(x)$ dla $x \in X$.*

Oryginalny dowód twierdzenia o nierównościach jest skomplikowany i mało przejrzysty. Uproszczone dowody podali m.in. R. Sikorski (1953), V. Ptak (1956), S. Simmons (1968) i wielu innych autorów wskazujących na prawdziwość tezy również w sytuacjach ogólniejszych (półgrupy przemienne, stożki) od rozpatrywanej przez Mazura i Orlicza. Użyli oni swojego twierdzenia o nierównościach do wykazania: istnienia szczególnych typów całek, twierdzeń o oddzielaniu zbiorów wypukłych, możliwości rozkładu funkcjonałów na nieujemne komponenty, twierdzeń o istnieniu rozwiązań nierówności $T(x) \geq y$, gdzie T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha lub przestrzeniami Frécheta, a $\geqslant$ relacją zadaną przez stożek. O kierunkach uogólnień twierdzenia Mazura-Orlicza o nierównościach i jego dalszych zastosowaniach informują monografie Alexiewicz [A69], Fuchssteiner i Lusky [FS81], König i Neumann [KN86, Rozdział II], Peressini [P67], a także prace Köthe [K94] i Neumann [Ne91].

Orlicz, mimo osobistego uczestnictwa w fundamentalnych pracach Szkoly Lwowskiej i ogromnej wiedzy, nie zdecydował się na napisanie monografii z zakresu analizy funkcjonalnej. Jak już było opisane, Orlicz goszcząc w Instytucie Matematycznym Academia Sinica w Pekinie — był to rok 1958 — przedstawił po niemiecku cykl wykładów na temat liniowej analizy funkcjonalnej. Wykłady te zostały przetłumaczone (przez profesorów Guan Zhao Zhi i Li Wen Qing) i wydane pieć lat później w języku chińskim [K3], a po kolejnych niemal trzydziestu latach przetłumaczono tę publikację na angielski [K4]. Uczynił to profesor Lee Peng Yee z Narodowego Uniwersytetu w Singapurze. Tak powstała książka *Linear Functional Analysis* zawierająca klasyczne elementy teorii przestrzeni Banacha i przestrzeni F-unormowanych oraz wiele niestandardowych przykładów i niebanalnych zastosowań metod analizy funkcjonalnej do rozwiązania problemów np. teorii sumowalności czy teorii funkcji. Kilka takich

problemów zostało zaatakowanych przez Orlicza z wykorzystaniem metod *teorii przestrzeni Saksa*, które wprowadził on w 1950 roku w pracy [49]. Jeżeli $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ są odpowiednio taką normą i F-normą na przestrzeni liniowej X, że kula jednostkowa $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zupełna w topologii $\tau(\|\cdot\|^*)$ F-normy $\|\cdot\|^*$, to trójkę $X_s = (B, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$ nazywa się przestrzenią Saksa (naturalnym przykładem, rozważanym w latach trzydziestych przez G. M. Fichtenholza, jest przestrzeń Saksa wyznaczona przez $L^\infty(0,1)$ z normami supremum istotnego i całkową). Orlicz skupiał swoje badania m.in. na poszukiwaniu warunków zapewniających ciągłość operatora T z $(X_s, \tau(\|\cdot\|^*))$ w przestrzeń Banacha lub Frécheta, jednakową ciągłość rodziny takich operatorów, reprezentacji funkcjonałów na X_s. Problematyka ta podjęta została w pracach: [49], [67], [70 - 72], [138]. Przestrzenie Saksa pozostają w ścisłym związku z teorią przestrzeni dwunormowych rozwiniętych m.in. przez Andrzeja Alexiewicza (patrz Cooper [Co78], Drewnowski [D96], Jach [J95], Semadeni [Se80]).

Monografie o przestrzeniach F-unormowanych i przestrzeniach Saksa (chronologicznie): Dunford i Schwartz [DS58], Peressini [P67], Alexiewicz [A69], Rolewicz [R84], Musielak [Mu76], Cooper [Co78], Kalton, Peck i Roberts [KPR].

D. Teoria sumowalności

Przypomnijmy pewne pojęcia z teorii sumowalności. Nieskończona macierz rzeczywista (lub zespolona) $A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \ldots$ określa *metodę sumowalności* następująco: ciąg $x = (x_n)$ jest A-*sumowalny* jeżeli wszystkie szeregi $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ są zbieżne i istnieje $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Niech c_A będzie polem zbieżności (polem sumowalności) metody A, tzn. c_A jest przestrzenią liniową wszystkich A-sumowalnych ciągów x. Gdy każdy ciąg zbieżny $x = (x_n)$ jest A-sumowalny, to metodę A nazywa się *zachowawczą*, a gdy dodatkowo $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} x_n$ to metodę A określa się jako *regularną*. Znane są dokładne charakteryzacje metod zachowawczych i regularnych (twierdzenia Silvermana-Toeplitza z roku 1913 i Kojimy-Schura z roku 1921). Ponadto mówi się, że metody A i B są *zgodne*, gdy $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} B_n x$ dla każdego $x \in c_A \cap c_B$.

Orlicz rozpoczął swoją działalność naukową w 1926 roku pracą [1]. Wykazał tam, że jeśli H jest macierzą Cesáro-Höldera oraz dla metody regularnej A zachodzi $c_H \subset c_A$, to metody H i A są zgodne.

Pierwszymi, którzy zastosowli metody analizy funkcjonalnej do teorii sumowalności byli S. Mazur (1930) i S. Banach (1932). Wielką skuteczność tych metod w odniesieniu do problemów sumowalności pokazali Mazur i Orlicz przedstawiając bardzo wartościowe wyniki (m.in. twierdzenie o ograniczonej zgodności — bounded consistency theorem) w artykule [19] z 1933 roku, który nie zawierał jednak dowodów. Zostały one opublikowane w późniejszej pracy [61] w roku 1954. Największy oddźwięk zyskało

Twierdzenie Mazura-Orlicza o zgodności ([19], [61]). *Jeżeli każdy ciąg ograniczony sumowalny metodą regularną A jest sumowalny metodą regularną B, to obie metody są zgodne dla ciągów ograniczonych tzn. sumują ciągi ograniczone do tej samej granicy.*

Twierdzenie Mazura-Orlicza, określane w literaturze anglojęzycznej jako *Bounded Consistency Theorem* uważane jest za fundamentalne dla teorii sumowalności (W. H. Ruckle w pracy [Ru79] pisze: *The Bounded Consistency Theorem is a principal result of summability theory. Indeed, it holds a claim to a second position in the theory just after the Silverman-Toeplitz Theorem*). Było one udowadniane na wiele sposobów (patrz Brudno [Br45], Zeller [Ze58], Zeller i Beekmann [ZB70], Ruckle [Ru79], Snyder i Wilansky [SW80] i Wilansky [Wy84]). Autorem jednego z dowodów (liczącego kilka stron niełatwych rachunków), podanego w 1945 roku, był A. L. Brudno [Br45]. W związku z tym faktem mówi się niekiedy o twierdzeniu Brudno-Mazura-Orlicza zamiast Bounded Consistency Theorem (porównaj np. Jakimovski i Livne [JL71]). Oryginalny dowód twierdzenia Mazura-Orlicza o zgodności został uproszczony przez Orlicza w [67], a w sposób krótki, elegancki i elementarny pokazali je Snyder i Wilansky w [SW80]. Z kolei N. A. Davydov [Da72] wykazał, że twierdzenie o zgodności nie jest prawdziwe dla ciągów nieograniczonych (nie można go wzmocnić nawet o jeden ciąg nieograniczony). Boos i Leiger w [BL89] podali listę 53 prac o tym twierdzeniu i jego uogólnieniach.

Niezwykle ważną obserwacją dokonaną przez Mazura i Orlicza w roku 1933 było spostrzeżenie, że przestrzenie Banacha nie są odpowiednim narzędziem metodycznym do badań pól sumowalności, natomiast wiele można uzyskać angażując metody przestrzeni Frécheta. Bardzo użyteczną okazuje się

ośrodkowa topologia liniowa na c_A wprowadzona przez rodzinę półnorm

$$p(x) = \sup_n |\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k|,\ p_n(x) = \sup_m |\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k|,\ q_n(x) = |x_n|,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Temat pracy [61] to przede wszystkim zagadnienia zgodności metod sumowalności, rzędów wzrostu ciągów z pola sumowalności i istnienia nieograniczonych ciągów w polu sumowalności.

Problematyka podjęta przez Mazura i Orlicza w [19] i [61] znalazła znaczną liczbę kontynuatorów, głównie za granicą (R. P. Agnew, A. L. Brudno, V. M. Darewsky, A. Wilansky, K. Zeller). Każda monografia poświęcona teorii sumowalności opublikowana po roku 1950 odwołuje się do wyników Mazura i Orlicza oceniając je niezwykle wysoko (np. K. Zeller we wstepie do swojej monografii [Ze58] pisze: ... *układ książki jest w sposób istotny wyznaczony przez fundamentalne funkcjonalno-teoretyczne badania S. Mazura i W. Orlicza*).

Idee zawarte w [19], [61] i w [66] zostały później rozwinięte i zastosowane przez Alexiewicza i Orlicza m.in. do wykazania twierdzeń o zgodności dla ograniczonych ciągów podwójnych i ciągu operatorów [65], [83] (patrz też [82]). Twierdzenia uzyskano w oparciu o metody teorii przestrzeni dwunormowych.

Problematyka sumowalności pojawiała się w pracach Orlicza także w następnych okresach w związku z badaniem przestrzeni Saksa i przestrzeni modularnych [71], [76], [79], [103], [105].

Monografie z teorii sumowalności (chronologicznie): Cooke [C50], Zeller [Ze58], Petersen [Pe66], Zeller i Beekmann [ZB70], Wilansky [Wi84].

E. Funkcjonały ortogonalnie addytywne, przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza

Współpraca Orlicza z Lechem Drewnowskim zaowocowała w końcu lat sześćdziesiątych cyklem prac poświęconych reprezentacji funkcjonałów ortogonalnie addytywnych określonych na ideałach w przestrzeniach funkcji mierzalnych, tj. podkratach X w przestrzeni $L^0(S, \Sigma, \mu)$ funkcji Σ-mierzalnych spełniających warunek: jeżeli $g \in X$ oraz $|f(s)| \leqslant |g(s)|$ μ-prawie wszędzie, to $f \in X$. O funkcjonale $\lambda : X \to \mathbb{R}$ mówi się, że jest *ortogonalnie addytywny* i $b\mu - \mu$ ciągły, gdy $\lambda(f + g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ o ile $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\}) = 0$ oraz $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ o ile $f_n \to f$ wg miary μ i $|f_n|, |f| \leqslant |g|$ dla pewnej funkcji $g \in X$. Przy tak ogólnych założeniach Drewnowski i Orlicz uzyskali całkową reprezentację funkcjonału λ ortogonalnie addytywnego i $b\mu - -\mu$ ciągłego, a mianowicie

$$\lambda(f) = \int_S \varphi(f(s), s)d\mu, \tag{6}$$

gdzie φ jest funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego. Jednym z wniosków wynikających z powyższej postaci funkcjonału λ jest twierdzenie o tym, że operator $b\mu - -\mu$ ciągły $T : X \to L^0(S, \Sigma, \mu)$ spełniający dodatkowo warunek $(T(f))\chi_A = (T(f\chi_A))\chi_A$ dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ (χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A) jest operatorem kompozycji, tzn. $(T(f))(s) = \varphi(f(s), s)$ μ prawie wszędzie, gdzie i tutaj φ jest pewną funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego.

Innym szerzej wykorzystywanym twierdzeniem reprezentacyjnym autorstwa Drewnowskiego i Orlicza jest wynik o postaci modularu ortogonalnie addytywnego ϱ zadanego na podkracie $X \subset L^0(S, \Sigma\, \mu)$, która zawierając funkcję f, zawiera też iloczyn $f\chi_A$ dla dowolnego $A \in \Sigma$. Przez modular ortogonalnie addytywny rozumie się funkcję $\varrho : X \to [0, \infty]$ spełniającą cztery warunki:

(ϱ_A) $\varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

(ϱ_B) $|f| \leqslant |g| \Rightarrow \varrho(f) \leqslant \varrho(g)$,

(ϱ_C) $0 \leqslant f_n \nearrow f \Rightarrow \varrho(f_n) \nearrow \varrho(f)$,

(ϱ_D) $\varrho(f + g) = \varrho(f) + \varrho(g)$ gdy $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\} = 0$.

Okazuje się, że modular ϱ jest także postaci (7) przy czym jeśli miara μ jest dodatkowo bezatomowa oraz $\varrho(f) = \varrho(g)$ dla jednakowo mierzalnych funkcji $f, g \in X$ oraz $\chi_S \in X$, to funkcja φ reprezentująca ϱ jest funkcją jednej zmiennej: $\varrho(f) = \int_S \varphi(f(s))d\mu$.

Twierdzenie o reprezentacji modularów ortogonalnie addytywnych odgrywa kluczową rolę w badaniach *krat Orlicza* — abstrakcyjnych odpowiedników przestrzeni Musielaka-Orlicza. Kraty Orlicza,

wprowadzone przez W. J. Classa, A. C. Zaanena i W. Wnuka, są naturalnym rozszerzeniem AL^p-przestrzeni F. Bohnenblusta będących abstrakcyjnymi odpowiednikami przestrzeni L^p. Całkowa postać modularu ortogonalnie addytywnego została użyta przez N. J. Kaltona i L. Drewnowskiego do wykazania twierdzenia o faktoryzacji operatorów AM-zwartych, określonych na ideałach z normą porządkowo ciągłą, zawartych w przestrzeniach Orlicza i Musielaka-Orlicza.

Orlicz rozwijał teorię przestrzeni modularnych, zapoczątkową przez Hidegoro Nakano w książkach *Modulared Semi-ordered Linear Spaces* i *Topology and Topological Linear Spaces* [Na51].

Uzyskał on szereg wyników dotyczących własności typu Fatou i Levi'ego w kratach liniowych z funkcjonałem ϱ, spełniającym warunki $(\varrho 1), (\varrho 2)$ oraz warunek $\varrho(f \vee g) \leqslant \varrho(f) + \varrho(g)$ dla $f, g \geqslant 0$.

Współpracując z Julianem Musielakiem zauważył, że funkcjonał zwany też **modularem w sensie Musielaka-Orlicza** ϱ, określony na rzeczywistej przestrzeni liniowej X i mający własności:

$(\varrho 1)$ $\quad \varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$(\varrho 2)$ $\quad \varrho(-x) = \varrho(x),$

$(\varrho 3)$ $\quad \varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \varrho(x) + \varrho(y), \quad \text{dla} \quad \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1,$

$(\varrho 4)$ $\quad \varrho(tx) \to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to 0,$

definiuje na X F-normę równością

$$\|x\|_\varrho = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\}, \tag{7}$$

przy czym $\|x_n\|_\varrho \to 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla wszystkich $t > 0$. Równość (7) jest przeniesieniem na przypadek ogólnych przestrzeni liniowych pomysłu Mazura i Orlicza, którzy w pracy [78] tak właśnie wprowadzili topologię metryczną w przestrzeniach Orlicza generowanych przez niewypukłe funkcje Orlicza (w roli modularu występuje wtedy oczywiście funkcjonał $\int_S \varphi(|f(s)|)d\mu$).

Orlicz rozważał oprócz zbieżności w sensie F-normy $\|\cdot\|_\varrho$ tzw. *zbieżność modularną* przyjmując, że $x_n \xrightarrow{\varrho} 0$, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla pewnego $t > 0$. Zbieżność modularna nie jest na ogół topologiczna (tzn. nie można zadać topologii τ na X w taki sposób, aby $x_n \xrightarrow{\varrho} 0 \ \Leftrightarrow\ x_n \xrightarrow{\tau} 0$). Bywa ona jednak przydatna w zagadnieniach aproksymacyjnych (np. funkcje klasy C_0^∞ nie muszą być F-normowo gęste w przestrzeni Orlicza-Sobolewa, ale każda funkcja z tej przestrzeni jest granicą, w sensie zbieżności modularnej, ciągu funkcji klasy C_0^∞).

Orlicz zajmował się również przypadkiem modularów s-wypukłych $(0 < s \leq 1)$, tzn. w miejsce aksjomatu $(\varrho 3)$ przyjmował warunek

$$\varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha^s \varrho(x) + \beta^s \varrho(y) \text{ dla } \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha^s + \beta^s = 1. \tag{8}$$

Jak wykazano w pracy [98] modular s-wypukły ϱ definiuje normę s-jednorodną (= s-normę) wzorem

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/s}}\right) \leqslant 1\}.$$

Co więcej, czego także dowiódł Orlicz w [97], zachodzi równość

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf_{t>0} \max\,(t^{-s}, t^{-s}\varrho(tx)).$$

Powyższa s-norma jest równoważna s-normie

$$\|x\|^0_{s\varrho} = \inf_{t>0}(t^{-s} + t^{-s}\varrho(tx)),$$

która dla $s = 1$ jest tzw. normą Amemiya, dobrze znaną w teorii przestrzeni modularnych Nakano.

Odnotujmy, że funkcje *s-wypukłe w sensie Orlicza*, tzn. spełniające (8), zdobywają sobie popularność po artykule Hudzika i Maligrandy [HM94] z 1994 roku.

Ważną klasą przestrzeni modularnych są *przestrzenie Musielaka-Orlicza* zwane też *przestrzeniami Orlicza z parametrem*, zdefiniowane w pracy Musielaka i Orlicza [MO59] z 1959 roku:

$$L^\varphi(\mu) = \{x : \int_\Omega \varphi(\lambda|x(t)|, t)d\mu < \infty \,\text{dla pewnego}\, \lambda > 0 \ \text{zależnego od}\, x\},$$

gdzie funkcja dwóch zmiennych $\varphi : [0,\infty]\times\Omega \to [0,\infty]$ spełnia pewne konieczne założenia. Przestrzenie te w przypadku funkcji $\varphi(u,t)$ wypukłej w zmiennej u powinny nazywać się przestrzeniami Nakano lub przestrzeniami Nakano-Orlicza, gdyż pojawiły się już u Nakano [Na50] w 1950 roku. Przykładowo, Šragin pisał właśnie w [Sr67] *przestrzenie Orlicza-Nakano*. Specjalny przypadek tych przestrzeni tzn. gdy $\varphi(u,t) = u^{p(t)}$ nosi właśnie nazwę przestrzeni Nakano (lub przestrzeni L^p z parametrem lub ,,zmiennych przestrzeni L^p"), choć te z kolei przestrzenie, zarówno w przypadku funkcyjnym jak i ciągowym, rozważał Orlicz [10] już w 1931 roku.

W badaniu przestrzeni Musielaka-Orlicza, a szczególnie geometrii kuli, wiele rezultatów uzyskali Henryk Hudzik i Anna Kamińska. Zacytujmy ich kilka ważnych prac o przestrzeniach Musielaka-Orlicza: [H83], [H85], [Ka81], [Ka82] i [Ka83] (dokładny opis badań można znaleźć w ich wspólnej pracy przeglądowej [HKM]). Przestrzenie te były i są nadal badane w całym świecie. Wspomnijmy niektórych badaczy tych przestrzeni (alfabetycznie): G. Alherk, S. Chen, Y. Cui, S. Dhompongsa, L. Drewnowski, X. Fan, F. L. Hernández, Y. Hui, J. E. Jamison, A. Kasperski, P. Kolwicz, W. Kowalewski, W. Kurc, T. Landes, G. Lewicki, R. Maleev, M. Nawrocki, V. Peirats, R. Płuciennik, B. Rodriguez-Salinas, C. Ruiz, S. Saejung, Z. Shi, I. V. Shragin, K. Urbanik, T. Wang, M. Wisła, W. Wnuk, M. Wójtowicz, C. Wu, Z. Zbąszyniak, B. Zlatanov.

Odnotujmy też, że badania w przestrzeniach Nakano są ostatnio bardzo popularne. Bada się w nich np. ograniczoność operatora maksymalnego i innych klasycznych operatorów (L. Diening, D. Cruz-Uribe, D. E. Edmunds, X. Fan, A. Fiorenza, P. Hästö, A. Yu. Karlovich, V. Kokilashvili, T. Kopaliani, A. K. Lerner, A. Nekvinda, C. Pérez, L. Pick, M. Ružička, S. Samko). Pamiętać trzeba, że w dowodach potrzebne są nowe techniki, gdyż przestrzenie te nie są symetryczne (funkcje równomierzalne mogą mieć różne normy).

Teoria przestrzeni modularnych pozwalała na objęcie wspólną metodyką badań klas przestrzeni dość od siebie pod różnymi względami odległych (np. przestrzeni Musielaka-Orlicza i przestrzeni funkcji o skończonej φ-wariacji). Jednak teoria ta, mimo wielokierunkowych badań, nie przyniosła istotnego postępu w ,,rozpracowywaniu" F-przestrzeni czy ogólniej przestrzeni liniowo-topologicznych.

Monografie z przestrzeni modularnych to (chronologicznie): Nakano [Na50], Musielak [Mu78], [Mu83], Wnuk [Wn84].

F. Operatory wielomianowe i analityczne

W latach trzydziestych, po stworzeniu zasadniczych zrębów liniowej analizy funkcjonalnej, podjęto we Lwowie pewne próby zbudowania nieliniowej analizy funkcjonalnej. Owocem tych wysiłków były prace J. Schaudera (m. in. twierdzenie o punkcie stałym) oraz prace Mazura i Orlicza o operatorach wielomianowych. Wcześniej operatory wielomianowe rozważali m. in. M. Fréchet, A. D. Michal, R. S. Martin, T. Hildebrandt, F. Leja.

Prace Mazura i Orlicza [23], [26], [29], [30], [32] mają charakter pionierski. W pracy [23] bada się trzy równoważne definicje funkcji i operatorów wielomianowych.

Operator $U_m : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami liniowo-topologicznymi, nazywa się *wielomianem jednorodnym stopnia* m jeżeli U_m jest obcięciem do przekątnej operatora m-liniowego, tzn. $U_m(x) = U_m^*(x, x, ..., x)$, gdzie $U_m^* : X^m \to Y$ jest operatorem m-liniowym. Operator $P : X \to Y$ jest *operatorem wielomianowym stopnia* n jeżeli jest sumą skończonej liczby operatorów wielomianowych jednorodnych, tzn.

$$P(x) = U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x),$$

gdzie każdy U_m jest albo wielomianem jednorodnym stopnia m lub operatorem zerowym dla $0 \leqslant m \leqslant n$. Inne równoważne definicje operatorów wielomianowych podane przez Mazura i Orlicza są następujące:

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n, gdy

$$\Delta_h^{n+1} P(x) = 0 \quad \text{dla } x, h \in X,$$

gdzie różnice Δ_h^{n+1} określa się indukcyjnie w zwykły sposób,

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n jeżeli dla każdego $x, h \in X$ i każdej liczby t

$$P(x + th) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x, h)t^k,$$

gdzie $a_k(x, h) \in Y$ są niezależne od t.

W dyskusji nad różnymi definicjami Mazur i Orlicz posłużyli się tzw. formą biegunową. Wykazali oni mianowicie, że jeżeli U_k jest operatorem jednorodnym stopnia k, to odpowiadający mu symetryczny operator k-liniowy jest wyznaczony jednoznacznie; ten operator nazywa się operatorem generującym lub *formą biegunową*.

Wzór biegunowy Mazura-Orlicza (1935) jako uogólnienie wzoru $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$:

$$P_k^*(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=0,1} (-1)^{k-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k)} P_k(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k).$$

Główny rezultat w [26] to przeniesienie twierdzenia Banacha-Steinhausa o ciągach operatorów liniowych na przypadek operatorów wielomianowych o jednostajnie ograniczonych stopniach. Autorzy wykazali następujący fakt:

Twierdzenie Mazura-Orlicza ([26]). *Jeżeli P_n jest ciągiem ciągłych operatorów wielomianowych stopnia $\leqslant N$ z F-przestrzeni X do przestrzeni F-unormowanej Y oraz jeżeli $\{x \in X : \{P_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$ jest ograniczony$\}$ jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w X, to ciąg $(P_n(x))$ jest jednakowo ciagły w $x = 0$. W konsekwencji, jeżeli $P_n(x) \to P(x)$ dla każdego $x \in X$ to P jest operatorem wielomianowym.*

W dwóch notach [30] i [32], opublikowanych w Sprawozdaniach Akademii Paryskiej w 1936 roku, Mazur i Orlicz podali szereg twierdzeń o podzielności funkcjonałów wielomianowych oraz twierdzenia o funkcjonałach wymiernych. Oni również postawili kilka problemów w *Księdze Szkockiej* (Mauldin [Ma81], problemy 20.1, 56, 73, 74) zwiaząnych z operatorami wielomianowymi. Problem 73 to pytanie:

Czy jeśli c_n jest najmniejszą stałą o własności, że dla dowolnego symetrycznego operatora n-liniowego F między przestrzeniami unormowanymi mamy

$$\sup_{\|x_i\|\leqslant 1, i=1,\ldots,n} \|F(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant c_n \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|F(x, \ldots, x)\|,$$

to $c_n = \frac{n^n}{n!}$?.

Problem ten został rozwiązany pozytywnie, a dokładne omówienie można znaleźć w komentarzu do Problemu 73 w *The Scottish Book* (Mauldin [Ma81]).

Operatory wielomianowe sa najprostszymi funkcjami analitycznymi między przestrzeniami Banacha. Ponadto są one używane do konstruowania innych operatorów analitycznych (przez rozwijanie w szereg wielomianów jednorodnych). Naturalnymi dziedzinami istnienia analitycznych odwzorowań są dziedziny w przestrzeniach zespolonych. Z drugiej strony, w wielu zastosowaniach analizy funkcjonalnej operatory analityczne w rzeczywistych przestrzeniach Banacha grają też istotną rolę. Dlatego w dwóch pracach Orlicza [50], [59] — wspólnych z A. Alexiewiczem — przenosi się dobrze znaną w zespolonych przestrzeniach Banacha teorię na przypadek rzeczywistych przestrzeni Banacha. Dla przykładu, w pracy [59] wykazuje się:

Twierdzenie Alexiewicza-Orlicza (1953). *Słaba i mocna analityczność w rzeczywistych przestrzeniach Banacha są równoważne.*

Wyniki Mazura i Orlicza oraz Alexiewicza i Orlicza są cytowane w monografiach Dineen [Di81], Hille [Hi48], Hille i Philips [HP57]. Wyniki te stały się przedmiotem dalszych badań wielu matematyków, m. in. Lelonga [Le70], [Le71], Bochnaka i Siciaka [BS71], Turpina [Tu76] i Dineena [Di81]. Monografia Dineena [Di81] zawiera pełną bibliografię dotyczącą operatorów wielomianowych i operacji analitycznych wraz z interesującymi komentarzami.

G. Funkcje wektorowe: mierzalność, różniczkowanie i analityczność

W kilku pracach Orlicz badał funkcje wektorowe. Zajmował się on różniczkowalnością i całkowalnością funkcji wektorowych, kasyfikacją słabą i mocną w odniesieniu do ciągłości, skończonej warjacji, klas Baire'a i pochodnych.

Praca [46], napisana wspólnie z A. Alexiewiczem, dotyczy klas Baire'a funkcji wektorowych. W szczególności udowodniono tam, że funkcja o przeciwdziedzinie ośrodkowej, odwzorowująca przestrzeń metryczną w przestrzeń Banacha X, słabo ciągła ze względu na pewien fundamentalny zbiór ciągłych funkcjonałów liniowych nad X, jest pierwszej klasy Baire'a i wynik przenosi się na klasy Baire'a wyższych rzędów.

W pracy [47], wspólniej z Mazurem, z 1948 roku wykazano (por. też Rolewicz [Ro84], str. 121-122):

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1948). *Niech X będzie F-przestrzenią. Każda funkcja ciągła $f : [0,1] \to X$ jest całkowalna w sensie Riemanna, wtedy i tylko wtedy, gdy X jest lokalnie wypukła.*

W pracy [51], wspólniej z A. Alexiewiczem, Orlicz badał zagadnienia całkowalności w sensie Riemanna funkcji $f : [0,1] \to X$. Podali oni przykład funkcji $f : [0,1] \to C[0,1]$ całkowalnej w sensie Riemanna, która nie jest słabo ciągła w żadnym punkcie tego przedziału. Wykazali też, że ani słaba całkowalność ani słaba ciągłość funkcji nie implikuje całkowalności w sensie Riemanna.

W pracy [53] (również wspólnej z A. Alexiewiczem) przedstawiają oni charakteryzacje zbiorów, w których funkcje wektorowe są różniczkowalne. Metoda kategorii pozwoliła na udowodnienie następującego faktu:

Twierdzenie (Alexiewicz-Orlicz, 1952). *Niech X i Y będą rzeczywistymi ośrodkowymi przestrzeniami Banacha oraz U dowolnym niepustym otwartym podzbiorem w X. Jeżeli $F : U \to Y$ jest ciągła i różniczkowalna dla każdego $h \in X$ i $x \in U$ tzn. $\lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} = \delta F(x,h)$ istnieje, to $\delta F(x,h)$ jest liniowa i ciągła względem h dla każdego $x \in U$ z wyjątkiem pewnego zbioru A pierwszej kategorii tzn. F jest ciągła Gâteaux różniczkowalna w $U \setminus A$).*

W 2005 roku Corbacho, Plichko i Tarieladze [CPT05] przypominają ten rezultat (istnieje ogromna literatura odnośnie różniczkowania między przestrzeniami Banacha lub ogólniejszymi, ale tylko książka Yamamuro [Ya74] cytuje tę pracę, ale nie ten rezultat !). Autorzy uogólniają twierdzenie Alexiewicza-Orlicza na przestrzenie liniowo-topologiczne i również na pochodne jednostronne.

W pracy [53] Alexiewicz i Orlicz konstruują też operator nierozszerzający (tzn. operator Lipschitza ze stałą 1) $T : c_0 \to c_0$ taki, że T ma wszędzie ciągłą względem x i h pochodną Gâteaux, ale nie ma w żadnym punkcie pochodnej Frecheta. Przykład ten cytuje Nashed w [Nas71] na str. 123.

Ponadto, w kolejnej wspólnej pracy [60], Alexiewicz i Orlicz zauważają, że każda funkcja analityczna na rzeczywistej przestrzeni lokalnie wypukłej ma lokalne przedłużenie do zespolono-analitycznej funkcji na kompleksyfikacji tej przestrzeni. Powyższe ich rozważania pojawiły się ponownie u Muñoza, Sarantopoulosa i Tonge [MST99] przy badaniu kompleksyfikacji rzeczywistych przestrzeni Banacha, wielomianów i odwzorowań wieloliniowych.

W pracy z Matuszewską [135], Orlicz rozważał wektorowe twierdzenie Riesza-Fischera oraz wektorowe analogony nierówności Bessela i równości Parsevala.

W pracach [152], [159], wspólnych z S. Szuflą, badają oni istnienie wektorowych rozwiązań pewnych równań całkowych w przestrzeniach Banacha.

Wyniki Mazura i Orlicza oraz Alexiewicza i Orlicza są cytowane w monografiach Rolewicza [Ro84] i Yamamuro [Ya74]. Były też przedmiotem dalszych badań wielu matematyków.

H. Indeksy Matuszewskiej-Orlicza

W 1960 roku Matuszewska i Orlicz [91] zdefiniowali liczby charakteryzujące wzrost funkcji Orlicza φ i nazwali je *indeksami* funkcji φ. Dla $\lambda > 0$ niech

$$k_\varphi^a(\lambda) = \sup_{u>0} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)} \ , \ k_\varphi^\infty(\lambda) = \limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)} \ , \ k_\varphi^0(\lambda) = \limsup_{u\to 0^+} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}$$

oraz

$$s_\varphi^i = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\ln k_\varphi^i(\lambda)}{\ln\lambda}\ ,\ \sigma_\varphi^i = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln k_\varphi^i(\lambda)}{\ln\lambda}$$

dla $i = a, \infty, 0$.

Powyższe granice istnieją dla każdej funkcji Orlicza φ, chociaż mogą być nieskończone (kładziemy $\ln\infty = \infty$). Zachodzą nierowności

$$0 \leqslant s_\varphi^i \leqslant \sigma_\varphi^i \leqslant \infty, \quad i = a, \infty, 0,$$

i dlatego granice $s_\varphi^a, s_\varphi^\infty, s_\varphi^0$ nazywają się *dolnymi indeksmi Matuszewskiej-Orlicza*, a granice $\sigma_\varphi^a, \sigma_\varphi^\infty, \sigma_\varphi^0$ *górnymi indeksami Matuszewskiej-Orlicza.* Powyższe trzy rodzaje indeksów mają związek z przestrzeniami Orlicza $L^\varphi = L^\varphi(\Omega, \Sigma, \mu)$ generowanymi przez funkcje φ nad trzema zasadniczymi przestrzeniami miary: μ nieatomowa i nieskończona, μ nieatomowa i skończona oraz μ miara licząca na $\Omega = \mathbb{N}$. W przypadku gdy $\varphi(u) = u^p,\ p > 0$, to wszystkie indeksy są równe p, natomiast gdy $\varphi(u) = u^p \ln(1+u)$, to $s_\varphi^a = s_\varphi^\infty = \sigma_\varphi^\infty = p$ oraz $\sigma_\varphi^a = s_\varphi^0 = \sigma_\varphi^0 = p+1$. Istotne znaczenie tych indeksów polega na tym, że pozwalają one uogólnić pojęcie wykładnika sprzężonego, gdyż zachodzą równości

$$\frac{1}{s_{\varphi^*}} + \frac{1}{\sigma_\varphi} = \frac{1}{s_\varphi} + \frac{1}{\sigma_{\varphi^*}} = 1$$

(T. Ando 1960, W. Matuszewska 1961).

W pracach [91], [96], [111] Władysław Orlicz i Wanda Matuszewska badali indeksy wykazując następujące własności:

1. *Indeksy Matuszewskiej-Orlicza są niezmiennicze ze względu na równoważność tzn. jeżeli* $\varphi_1 \overset{i}{\sim} \varphi_2$ *to* $s_{\varphi_1}^i = s_{\varphi_2}^i$ *oraz* $\sigma_{\varphi_1}^i = \sigma_{\varphi_2}^i$, *dla* $i = a, \infty, 0$.

2. *Jeżeli* $\sigma_\varphi^\infty > 0$ *to dla każdego* $0 < s < s_\varphi^\infty$ *mamy* $\varphi \overset{\infty}{\sim} \chi_s$, *gdzie* $\chi_s(u) = \psi(u^s)$ *oraz* ψ *jest wypukłą funkcją Orlicza. Jezeli* $0 < s < \sigma_\varphi^\infty < \infty$, *to istnieje analogiczna reprezentacja z wklęsłą funkcją* ψ *— ten ostatni warunek jest równoważny z warunkiem* Δ_2 *dla dużych* u.

Indeksy Matuszewskiej-Orlicza znalazły zastosowanie przy badaniu przestrzeni Orlicza. I tak: Orlicz w [96] wykazał, iż $L^\varphi(0,1)$ jest lokalnie ograniczona, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_\varphi^\infty > 0$, T. Ando w 1962 roku dowiódł, że gdy $s_{\varphi_1}^\infty > \sigma_{\varphi_2}^\infty$, to każdy operator całkowy z $L^{\varphi_1}(0,1)$ do $L^{\varphi_2}(0,1)$ jest zwarty, Lindenstrauss i Tzafriri w 1972 roku udowodnili, że ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ jest izomorficzna z podprzestrzenią ośrodkowej ciągowej przestrzeni Orlicza ℓ^φ, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in [s_\varphi^0, \sigma_\varphi^0]$ oraz, że każdy liniowy ograniczony operator z ośrodkowej przestrzeni ℓ^{φ_1} do ośrodkowej ℓ^{φ_2} jest zwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{\varphi_1}^0 > \sigma_{\varphi_2}^0$.

Znane są też zastosowania indeksów przy badaniu ograniczoności operatorów całkowych, funkcji maksymalnych, operatorów singularnych w zwykłych lub wagowych przestrzeniach Orlicza. Przykładowo, klasyczny maksymalny operator Hardy-Littlewooda M jest ograniczony w $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_\varphi^a > 1$ (G. G. Lorentz 1955, T. Shimogaki 1965, D. Gallardo 1988). Więcej informacji o tych rezultatach można znaleźć w książce Kokilashvili i Krbec [KK91] oraz Kufner, Maligranda i Persson [KMP07].

Indeksy występują również w uogólnieniu twierdzeń interpolacyjnych typu Marcinkiewicza na przestrzenie Orlicza, choć założenia na φ są często formułowane w terminach nierówności całkowych (A. Zygmund 1956, E. M. Semenov 1968, D. W. Boyd 1969, M. Zippin 1971, A. Torchinsky 1976, L. Maligranda 1984, A. Cianchi 1998; patrz ponadto Torchinsky [To76], Maligranda [Ma84]).

Indeksy Matuszewskiej-Orlicza stały się punktem wyjścia dla wprowadzenia podobnych charakterystyk liczbowych szerszych klas przestrzeni: przestrzeni symetrycznych (D. W. Boyd 1969) — w związku z problemami interpolacji operatorów, funkcyjnych przestrzeni Banacha (T. Shimogaki 1965 i J. Grobler 1975) — w związku z badaniem operatorów zwartych, krat Banacha (P. Dodds 1977).

Więcej informacji o indeksach i ich zastosowaniach można znaleźć w książkach Krein, Petunin i Semenov [KPS], Lindenstrauss i Tzafriri [LT79], Maligranda [Mal89], Johnson, Maurey, Schechtman i Tzafriri [JMST], Bingham, Goldie i Teugels [BGT89] oraz w pracy Maligrandy [Ma84].

I. Interpolacja operatorów

Operator $T : X \to X$ nazywa się *operatorem Lipschitza* w przestrzeni unormowanej X, jeżeli $T0 = 0$ oraz istnieje stała dodatnia M taka, że $\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$. Najmniejsza stała M jest normą Lipschitza operatora T i oznacza się ją przez $\|T\|_{Lip(X)}$. Niech X_0, X, X_1 będzie trójką przestrzeni Banacha, przy czym mamy ciągłe włożenia $X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0$. Jeżeli dowolny operator liniowy i ciągły (Lipschitza) $T : X_i \to X_i$, $i = 0, 1$ jest ciągły (Lipschitza) z X w X, to przestrzeń X nazywa się *interpolacyjną* między X_0 i X_1 dla operatorów liniowych (Lipschitza). Oczywiście jeśli X jest interpolacyjna dla operatorów Lipschitza to jest interpolacyjna dla operatorów liniowych.

W 1935 roku Orlicz [24] wykazał, że ośrodkowa przestrzeń Orlicza $L^\varphi[a, b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów liniowych. Wiele lat później, bo w 1954 roku, uzyskał rezultat dla wszystkich przestrzeni Orlicza i dla operatorów Lipschitza, a mianowicie:

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza ([63]). *Każda przestrzeń Orlicza $L^\varphi[a, b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów Lipschitza oraz*

$$\|T\|_{Lip\,(L^\varphi)} \leqslant \ max(\|T\|_{Lip\,(L^1)}, \|T\|_{Lip\,(L^\infty)}).$$

W orginalnym sformułowaniu twierdzenia, po prawej stronie nierówności występuje w miejsce 1 stała $C > 1$. Twierdzenie to było uogólniane na przypadek przestrzeni symetrycznych przez B. S. Mitjagina (1965), A. P. Calderóna (1966), T. Shimogaki'ego (1968), G. G. Lorentza i T. Shimogaki'ego (1969, 1971), G. I. Russu (1969), L. Maligrandę (1979, 1989, 1991). Problematyka tych uogólnień podejmowana jest w Krein, Petunin i Semenov [KPS], Bennett i Sharpley [BS88], Maligranda [Ma89], [Mal89], [Ma91].

W 1954 roku w pracy [62] Orlicz udowodnił również inne twierdzenie:

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza ([62]). *Dla dowolnej rosnącej i wklęsłej funkcji w na $[0, \infty)$, przestrzeń funkcji lipschitzowskich $Lip\,w$ jest interpolacyjna między $C[a, b]$ i $Lip\,1$ na $[a, b]$ dla operatorów liniowych (i dla pewnej klasy operatorów nieliniowych).*

Twierdzenie to nie zostało zauważone w literaturze, choć było pierwszym twierdzeniem interpolacyjnym wykraczającym poza przestrzenie Banacha funkcji mierzalnych. Analogiczne badania wiele lat później prowadzili R. O'Neil (1966), E. M. Semenov (1968) i J. Peetre (1969). Więcej o twierdzeniach interpolacyjnych typu Orlicza można znaleźć w pracach Maligrandy [Ma89] i [Ma91].

W pracy [144], wspólnej z Henrykiem Hudzikiem i Ryszardem Urbańskim, udowodnione zostało twierdzenie o interpolacji operatorów subliniowych w ciągowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza. Wykazane zostało twierdzenie typu Riesza-Thorina przy użyciu metody trzech prostych dla funkcji subharmonicznych. Zaletą takich rozważań jest stała 4 lub 8 w oszacowaniu norm operatorów w zależności od przypadku rzeczywistego lub zespolonego. Bardziej ogólne twierdzenia o interpolacji przestrzeni Orlicza, bez zwracania specjalnej uwagi na najlepsze oszacowanie norm, były wykazane przez wielu autorów, a najważniejszy jest tu rezultat Ovchinnikova [Ov84]. Twierdzenia interpolacyjne dla przestrzeni Orlicza z możliwie najlepszymi szacowaniami stałej interpolacji można znaleźć w książkach Maligrandy [Ma89], Brudnyi i Krugljak [BK91], oraz pracy Karlovich i Maligranda [KM01].

Monografie z dziedziny interpolacji operatorów to (chronologicznie): Krein, Petunin i Semenov [KPS], Ovchinnikov [Ov84], Bennett i Sharpley [BS88], Maligranda [Mal89], Brudnyi i Krugljak [BK91].

J. Równania różniczkowe — twierdzenia generyczne

Zbiór A w przestrzeni metrycznej X nazywa sie zbiorem *I kategorii Baire'a* (chudym), jeżeli jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych; zbiór jest nigdziegęsty (rzadki), jeżeli wnętrze domknięcia jest puste. Jeżeli zbiór A nie jest I kategorii Baire'a to nazywamy go zbiorem *II kategorii Baire'a*. Zbiór A jest *rezydualny*, jeśli jego dopełnienie jest zbiorem I kategorii. Czasami zamiast mówić, że zbiór jest rezydualny mówimy, że opisywana przez niego własność jest generyczna. Podstawą wszystkich rozważań jest klasyczne twierdzenie Baire'a: zupełna przestrzeń metryczna jest II kategorii. Każdy zbiór rezydualny w tej przestrzeni jest gęsty i II kategorii.

Odpowiedź na pytanie, czy w zbiorze X jakichś obiektów matematycznych istnieją obiekty o danej własności W, można często uzyskać stosując metodę kategorii Baire'a. Należy wyposażyć X w pewną metrykę zupełną i stwierdzić w niej rezydualność (generyczność) zbioru elementów o własności W. Tego rodzaju problematyka była przedmiotem zainteresowań Szkoły Lwowskiej już w latach trzydziestych. Powszechnie znane są twierdzenia S. Mazurkiewicza (1931) i S. Banacha (1931) o generyczności własności nieróżniczkowalności wszędzie w przestrzeni funkcji ciągłych $C[a,b]$. Pierwsze zastosowanie metody kategorii Baire'a w teorii równań różniczkowych podał Orlicz w 1932 roku. Rozważmy wszystkie funkcje f ciagłe i ograniczone w prostokącie $Q = [a,b] \times [c,d]$ lub $Q = [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Klasyczne twierdzenie Peano informuje o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania problemu Cauchy'ego

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Standardowym założeniem, gwarantującym jednoznaczność rozwiązania w Q, jest założenie, że f spełnia warunek Lipschitza. W przestrzeni Banacha $C(Q)$ z norma supremalną, zbiór funkcji spełniających warunek Lipschitza jest zbiorem I kategorii Baire'a i możnaby przypuszczać, że zbiór funkcji f, dla których (9) ma jednoznaczne rozwiązanie jest zbiorem I kategorii, ale jak wykazał właśnie Orlicz, zbiór ten jest zbiorem II kategorii Baire'a.

Twierdzenie Orlicza o kategoriach ([14]). *Zbiór funkcji f, dla których równanie* (9) *posiada jednoznaczne rozwiązanie, jest rezydualny w przestrzeni $C(Q)$.*

Mamy tutaj więc trochę paradoksalną sytuację, gdyż twierdzenie Orlicza pokazuje, iż praktycznie „wszystkie" równania różniczkowe mają jednoznaczne rozwiązania, bo te bez jednoznacznego rozwiązania stanowią zbiór chudy. Podobny rezultat dla problemu Darboux dotyczącego równań typu hiperbolicznego $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ został uzyskany przez Alexiewicza i Orlicza w [68].

Od lat siedemdziesiątych dał się zauważyć wyraźny wzrost zainteresowania problematyką generyczną w przestrzeniach nieskończonego wymiaru. Zapoczątkowała go praca Lasoty i Yorke'a [LY73], gdzie dowiedziono, że zbiór funkcji ciągłych f, dla których problem Cauchy'ego dla równania $x'(t) = f(t, x(t))$ w przestrzeni Banacha, posiada własność istnienia, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych, jest zbiorem rezydualnym w przestrzeni funkcji ciągłych. Przypomnijmy, że problem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha X ma rozwiązanie dla dowolnej funkcji ciagłej f, wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowa (A. N. Godunov 1975).

Dalsze twierdzeniach typu Orlicza o kategoriach (dotyczące własności punktów stałych dla odwzorowań nierozszerzających, zbieżności kolejnych przybliżeń, rozwiązań rozmaitych typów równań różniczkowych, równań funkcyjnych i różniczkowo-funkcyjnych) uzyskali m. in. G. J. Butler, F. S. De Blasi, T. Costello, T. Dominguez Benavides, M. Kisielewicz, M. Kwapisz, J. Myjak, G. Pianigiani, S. Szufla, G. Vidossich.

W latach 1979-1981 Orlicz powrócił do własności generycznych. W pracy [143], wspólnej ze Stanisławem Szuflą, wykazał, że zbieżność kolejnych przybliżeń dla równania $x = f(x)$ jest własnością generyczną ($f : C(K, X) \to C(K, X)$ oznacza funkcję ciągłą, a X jest przestrzenią Frécheta).

W artykule [149] badali oni generyczne własności istnienia, jednoznaczności i zbieżności ciągu aproksymacji nieskończonego układu równań całkowych typu Volterry w przestrzeniach Banacha. Dokładne omówienie powyższych rezultatów znajduje się w pracy Orlicza [150] oraz pracach Myjaka [My78] i [My80].

W kolejnych publikacjach [151] i [158], także wspólnych z S. Szuflą, podano warunki dostateczne istnienia rozwiązania całkowego równania Volterry

$$x(t) = p(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))ds,$$

gdzie rozwiązanie x jest funkcją z $J = [0, a]$ do ośrodkowej przestrzeni Banacha X i należy do wektorowej przestrzeni Orlicza $L^\varphi(J, X)$. Następnie stwierdzili, że przy tych samych założeniach, zbiór wszystkich rozwiązań $x \in L^\varphi(J, X)$ jest kompaktem R_δ w sensie Aronszajna.

Monografie z równań różniczkowych zawierające twierdzenia kategoryjne to: Myjak [My80], Piccinini, Stampacchia i Vidossich [PSV].

K. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji

Władysław Orlicz był autorem szeregu prac dotyczących skończenie addytywnych miar wektorowych. Zajmował się w nich m.in. konstrukcją całki z funkcji skalarnej względem miary μ o wartościach w przestrzeni Banacha X ([116], [117], [119], [131]) oraz zagadnieniem absolutnej ciągłości (w różnych znaczeniach tego pojęcia) miary wektorowej względem subaddytywnych funkcji zbioru ([124], [126], [130]). Warto tu zwrócić uwagę na twierdzenie podane w [126], gdzie przedstawiono dość ogólną sytuację, w której absolutna ciągłość każdej ze skalarnych funkcji zbioru $x^*\mu$ względem subaddytywnej skalarnej funkcji zbioru η implikuje absolutną ciągłość μ względem η (x^* jest tu ciągłym funkcjonałem liniowym na X). Problematyce różnych funkcji zbioru, twierdzeniu Brooksa-Jewetta, poświęcone są ponadto artykuły [145], [146], [155].

Inne prace, [37], [40], [55], przygotowane w okresie wojennym, ale z oczywistych względów opublikowane dopiero po kilku latach, traktują o zagadnieniu istnienia nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych. Zastosowane tam metody dowodów, teoriomiarowe i kategoryjne, nawiązują do przedwojennych idei S. Banacha, S. Mazurkiewicza i H. Auerbacha. Rezultaty Orlicza zawarte w [37] są o tyle ciekawe, że są pośrednie między efektywnymi konstrukcjami nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych a twierdzeniami egzystencjalnymi w rodzaju: w topologii normy supremalnej ciągłe funkcje różniczkowalne tworzą zbiór pierwszej kategorii Baire'a. Orlicz analizował różniczkowalność funkcji typu

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \quad f_\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n(x),$$

gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest jednostajnie zbieżnym w pewnym przedziale szeregiem funkcji ciągłych, $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ lub $\varepsilon_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a $\varepsilon_n(t)$ oznaczają funkcje typu Rademachera. Sformułował on warunki, których spełnienie przez funkcje f_n i ich pochodne implikuje, że funkcje f_ε nie są różniczkowalne dla ciągów (ε_n) należących do pewnego zbioru drugiej kategorii, a funkcje $f_\varepsilon(x,t)$ nie są różniczkowalne dla prawie wszystkich t.

W publikacji [40] podane zostało rozwiązanie problemu S. Ruziewicza (wpisanego do Księgi Szkockiej pod numerem 57) dotyczącego istnienia funkcji spełniających jednocześnie warunek Lipschitza względem niemalejącej funkcji w_0 oraz warunek nieróżniczkowalności względem innej funkcji niemalejącej w_1. Orlicz podał warunek konieczny i dostateczny istnienia takiej funkcji wyrażający się pewną relacją między w_0 i w_1.

Twierdzenie Orlicza ([40]). *Niech w_0 i w_1 będą funkcjami niemalejącymi na $[0,\ell]$, o wartości zero jedynie w zerze i prawostronnie ciągłymi w punkcie 0. Na to by istniała ℓ-okresowa funkcja f na $\mathbb{R}$ spełniająca warunki:*

(1) $|f(x+h) - f(x)| \leqslant w_0(|h|)$ *dla wszystkich* $|h| \leqslant \ell$,

(1) $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/w_1(|h|) = +\infty$ *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}$,

potrzeba i wystarcza, by

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{w_1(h)}{h}\gamma(h) = 0, \text{ gdzie } \quad \gamma(h) = \sup_{0<k\leqslant h} \frac{k}{w_0(k)}.$$

Dostateczność została udowodniona przez efektywne skonstruowanie funkcji f. Z twierdzenia Orlicza otrzymujemy jako bezpośrednie konsekwencje nastepujące rezultaty:

— rezultat A. Zygmunda (1929) i S. Steckela (1929): istnieje okresowa funkcja f taka, że zachodzi (1) oraz $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/h = +\infty$ dla wszystkich x, wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{h\to 0} h/w_0(h) = 0$,

— jeżeli $s > 1$ to $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}\varphi(2^{sn^2}x)$ jest ciągła, nieróżniczkowalna, spełnia warunek Höldera dla $\gamma < 1/s$ i dla $\delta > 1/s$ $\limsup_{h\to 0^+} |f(x+h) - f(x)|/h^\delta = +\infty$ dla wszystkich x, przy czym φ jest niestałą funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

Cytowane wyżej twierdzenie, opatrzone komentarzem, znaleźć można w książce van Rooij i Schikhof [RS82].

Analogicznym kwestiom poświęcona jest praca [55], gdzie zastąpiono granicę górną przez aproksymatywną granicę górną. Badania w tym zakresie kontynuował uczeń Orlicza, E. Tarnawski w połowie lat pięćdziesiątych.

Dla podziału $\pi:\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ przedziału $[a, b]$, funkcji rzeczywistej x określonej na $[a, b]$ oraz funkcji Orlicza φ, przyjmujemy

$$\sigma_\varphi(x, \pi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|).$$

Jeżeli $v_\varphi(x) = \sup_\pi \sigma_\varphi(x, \pi) < \infty$, to mówimy, że x ma *ograniczoną (skończoną) φ-wariację* na $[a, b]$. Dla $\varphi(u) = u^p$ otrzymujemy w przypadku $p = 1$ klasyczną wariację Jordana, a dla $p \neq 1$ tzw. p-tą wariację wprowadzoną w 1924 roku przez N. Wienera, a wykorzystaną wkrótce przez J. Marcinkiewicza i L. C. Younga w teorii szeregów Fouriera i całki Riemanna-Stieltjesa. Natomiast pojęcie φ-wariacji pojawiło się już w 1937 roku w pracy Young [Yo37].

Funkcjonał $v_\varphi(\cdot)$ jest ważnym przykładem modularu. Związana z nim klasa $V_0^\varphi = \{x : v_\varphi(x) < \infty \text{ i } x(a) = 0\}$ oraz przestrzeń $V^\varphi = \{x : \lambda x \in V_0^\varphi \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$ była badana przez Musielaka i Orlicza w [80]. Zauważyli oni m.in., że równość $V_0^\varphi = V^\varphi$ równoważna jest spełnianiu przez φ warunku Δ_2 dla małych u oraz $V_0^{\varphi_1} \subset V_0^{\varphi_2}$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $C, u_0 > 0$ zachodzi $\varphi_2(u) \leqslant C\varphi_1(u)$ o ile $u \in [0, u_0]$. Oni też wykazali zupełność przestrzeni V^φ (generowanej przez wypukłą funkcję φ) względem normy będącej funkcjonałem Minkowskiego zbioru V_0^φ, a ponadto podali uogólnienie twierdzenia Helly'ego o wyrywaniu podciągu i rozszerzyli wyniki E. R. Love z 1951 roku dotyczące φ-absolutnej ciągłości.

W szczególnie ważnej roli *logartymicznie wypukłe funkcje Orlicza* φ:

$$\varphi(u^\alpha v^\beta) \leqslant \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) \text{ dla } u, v, \alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1.$$

wystąpiły w pracy [136], gdzie Leśniewicz i Orlicz badali warunki istnienia całki Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b x(t)dy(t)$. Rozpatrywali oni szereg Younga

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),$$

gdzie φ, ψ oznaczają ściśle rosnące funkcje Orlicza, i dowiedli dwóch implikacji wiążących zbieżność powyższego szeregu z indeksami Matuszewskiej–Orlicza funkcji φ, ψ:

$$\frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} > 1 \Rightarrow S < \infty, \quad \frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} < 1 \Rightarrow S = \infty.$$

Podali też dwa dowody twierdzenia Younga (patrz [Yo38]): *jeżeli φ, ψ są logarytmicznie wypukłymi, ściśle rosnącymi funkcjami Orlicza, dla których szereg Younga jest zbieżny oraz $x \in V^\varphi$ jest funkcją ciągłą, a $y \in V^\psi$, to całka Riemanna–Stieltjesa funkcji x względem y istnieje i ponadto*

$$|\int_a^b x(t)dy(t)| \leqslant \varphi^{-1}(v_\varphi(x))\psi^{-1}(v_\psi(y)) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(n^{-1}v_\varphi(x))\psi^{-1}(n^{-1}v_\psi(y)).$$

Leśniewicz i Orlicz zauważyli też, że założenie $S < \infty$ jest istotne, bo gdy $S = \infty$, funkcje φ, ψ i funkcje do nich sprzężone φ^*, ψ^* spełniają warunek Δ_2 dla małych u, to istnieją funkcje ciągłe $x \in V^\varphi, y \in V^\psi$, dla których całka $\int xdy$ nie istnieje. Rezultaty przedstawione w [136] były później uogólniane przez Schramma [Sc85] i Younga [Yo76]. Co więcej, zostały zamieszczone w książce Dudley i Norvaisa [DN99].

W cyklu dziesięciu artykułów Orlicza, napisanych wspólnie z Jarosławem Ciemnoczołowskim i Wandą Matuszewską ([152], [157], [161]–[163], [166], [168], [170], [171], [175]), badane były związki przestrzeni V^φ z różnymi innymi przestrzeniami funkcji (w tym z przestrzenią funkcji o skończonej wariacji w sensie Watermana), przedstawione zostało uogólnienie twierdzenia Marcinkiewicza z pracy [Mr34] oraz następujące rozszerzenie twierdzenia Rjazanova z [Rj68]: *jeżeli wypukła funkcja Orlicza φ*

spełnia warunek Δ_2 *dla wszystkich* u *i* $v_\varphi(x) < \infty$, *gdzie* x *jest funkcją okresową na* $\mathbb{R}$ *o okresie* 1, *to dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje zbiór domknięty* $A \subset [0,1]$ *taki, że* $|[0,1] \setminus A| < \varepsilon$ *a zawężenie* $x_{|A}$ *funkcji* x *do zbioru* A *spełnia warunek typu Höldera*: $\varphi(|x_{|A}(t) - x_{|A}(s)|) \leqslant K|t-s|$.

Jeżeli P_δ oznacza podział przedziału $[a,b]$ o średnicy co najwyżej δ, to funkcjonał

$$v_\varphi^\delta(x) = \sup_{P_\delta} \sigma_\varphi(x, P_\delta)$$

jest także modularem i to modularem wypukłym, gdy φ jest wypukłą funkcją Orlicza. Wyznacza on więc normę typu Luxemburga $\|x\|_\varphi^\delta = \inf\{\varepsilon > 0 : v_\varphi^\delta(x/\varepsilon) \leqslant 1\}$. Podprzestrzeń domknięta $V_1^\varphi \subset V^\varphi$ zdefiniowana jako $V_1^\varphi = \{x \in V^\varphi : \lim_{\delta\to 0^+} \|x\|_\varphi^\delta = 0\}$ ma ciekawe własności topologiczne — jest ośrodkowa, ale jej przestrzeń dualna jest nieośrodkowa, a jeśli dodatkowo funkcja sprzężona φ^* spełnia warunek Δ_2 dla małych u, to V_1^φ nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni ℓ^1. Fakty te zostały ustalone w [168]. Tym samym Orlicz rozszerzył wynik J. Lindenstraussa i C. Stegalla z 1975 roku, którzy wskazali po raz pierwszy na przestrzenie V_1^φ, wyznaczone przez wypukłe funkcje potęgowe φ, jako na przykład ośrodkowej przestrzeni Banacha bez kopii ℓ^1, z nieośrodkowym dualem. Uproszczenia rozumowań Lindenstraussa i Stegalla dokonał S. V. Kisliakov w [Ki84].

W pracy [170] znajduje się analiza własności funkcjonału v_φ oraz związki przestrzeni V^φ z przestrzeniami funkcji o skończonej wariacji w sensie Wienera (tzn. $v_\varphi^W(x) = \lim_{\delta\to 0^+} v_\varphi^\delta(x) < \infty$) i z przestrzeniami o skończonej wariacji w sensie Riesza tj. $r_\varphi(x) = \sup_P \varrho_\varphi(x) < \infty$, gdzie

$$\varrho_\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|/(t_k - t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}).$$

Pokazano tam m. in., że addytywność (subaddytywność) funkcjonału v_φ jako funkcji przedziału oznacza liniowość funkcji φ (równoważność funkcji φ z funkcją liniową) w pewnym otoczeniu zera. Ponadto Orlicz zauważył, iż w ogólności $v_\varphi^W(x) \leqslant v_\varphi(x)$, chociaż zawsze istnieją funkcje, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość, a w przypadku subaddytywnych funkcji φ mamy $v_\varphi^W(x) = v_\varphi(x)$ dla dowolnej funkcji x. W artykule [171] znaleźć też można warunki implikujące, dla absolutnie ciągłej funkcji x o skończonej wariacji w sensie Riesza, przynależność pochodnej x' do klasy Orlicza $L_0^\varphi[a,b]$, przy czym rozważane są przede wszystkim niewypukłe funkcje Orlicza φ (przypadek wypukłych funkcji φ badali wcześniej J. T. Medvedev w 1953 roku i K. U. Rzaev w 1976 roku).

Odnotować wypada również pracę [169] napisaną wspólnie z Lechem Maligrandą. Przyjmując $v_p = v_\varphi$ oraz $V^p = V^\varphi$, gdzie $p \in (0,\infty)$, $\varphi(u) = u^p$, Autorzy tejże pracy udowodnili submultiplikatywność funkcjonału v_p dla $p \in (0,1]$ (tj. $v_p(xy) \leqslant v_p(x)v_p(y)$) oraz nierówność

$$v_1(\psi(|x|)) \leqslant \psi(v_1(x)), \tag{10}$$

która zachodzi dla dowolnej wypukłej funkcji Orlicza ψ oraz dowolnej funkcji $x \in V^1$. Zauważyli oni ponadto, że V^ψ jest algebrą Banacha względem norm $\|\cdot\|_{L^\infty} + \|\cdot\|$ oraz $2\psi^{-1}(1)\|\cdot\|$ (norma $\|\cdot\|$ jest tu normą typu Luxemburga związaną z modularem v_ψ) i zwrócili uwagę na fakt wynikania z nierówności (10) dobrze znanej uogólnionej *nierówności Opiala*:

$$\int_a^b |x(t)|^p |x'(t)| dt \leqslant (b-a)^p (p+1)^{-1} \int_a^b |x'(t)|^{p+1} dt.$$

Dowody przedstawione w [169] oparte są na szeregu nierówności, które były później dokładniej analizowane i uogólniane przez Pečarića i Gusića [PG96] oraz Castillo i Trousselota [CT07].

Orlicza zajmowały ponadto operatory kompozycji działające między przestrzeniami typu V^φ. Przykładowo, w pracy [166] istotnie rozszerzył następujący rezultat M. Josephy ([Jo83], patrz również Appell i Zabrejko [AZ90]): *jeśli* φ, ψ *są funkcjami Orlicza spełniającymi warunek* Δ_2 *dla małych* u *oraz* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją przyjmującą wartość zero w punkcie zero, to operator superpozycji* $\mathbb{F}(x) = F(x(\cdot))$ *odwzorowuje* V^φ *w* V^ψ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $v > 0$ *istnieje taka stała* K_v, *że dla* $|t|, |s| \leqslant v$ *mamy* $\psi(|F(t) - F(s)|) \leqslant K_v \varphi(|t-s|)$. Założenie warunku Δ_2 w powyższym twierdzeniu może być opuszczone — zauważył to Prus-Wiśniowski w [PW89].

Monografie o funkcjach rzeczywistych i funkcjach o skończonej uogólnionej wariacji: van Rooij i Schikhof [RS82], Appell i Zabrejko [AZ90], Dudley i Norvaisa [DN99].

3. Orlicz i historia matematyki oraz Orlicz o matematyce

W latach 70-tych Orlicz rozpoczął kolekcjonowanie informacji o matematykach ze Lwowa, bo planował napisać książkę *Historia Lwowskiej Szkoły Matematycznej*. Zamierzał też przygotować specjalną publikację o znanych i mniej znanych osobach, związanych ze Szkołą Lwowską. Niestety, tego planu nie udało mu się zrealizować. O swoim zamiarze opisu Szkoły Lwowskiej pisał Orlicz do wielu osób, m. in. do Z. W. Birnbauma w marcu 1979 roku (por. [M04], zdj. 70). Opublikował nawet dwa artykuły omawiające osiągnięcia matematyki lwowskiej: *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym* [148] i *Osiągnięcia polskiej matematyki w dziedzinie analizy funkcjonalnej w latach 1919-1951* [176]. Wersja angielska tego artykułu *Achievements of Polish mathematicians in the domain of functional analysis in the years 1919-1951* ukazała się w tomie drugim *Władysław Orlicz Collected Papers* [159].

Orlicz napisał też szereg artykułów przedstawiających życie i działalność matematyków polskich: Stefana Banacha [42], Władysława Michała Nikliborca [48], Stefana Kaczmarza [110] i [164], Antoniego Łomnickiego [135], Stanisława Mazura [109], Zbigniewa Polniakowskiego [160] i Juliusza Pawła Schaudera [142]. Drukiem ukazało się ponadto kilka okolicznościowych przemówień Władysława Orlicza [113], [127], [147], [165]. Uważnie je czytając można znaleźć w nich jego poglądy na temat matematyki i jego ocenę polskiego wkładu w rozwój królowej nauk.

W. Orlicz następująco mówił o matematyce:

> *Matematyka to swobodny tok myśli i pojęć, które matematyk, podobnie jak czyni to muzyk z dźwiękami, a poeta ze słowami, składa w twierdzenia i teorie.*

Orlicz zajmował się głównie analizą i o algebrze twierdził w późnych latach siedemdziesiątych, że (por. [Sim02], str. 1245):

> *Algebra nie upraszcza problemów, ale raczej je bardziej komplikuje niż one są.*

Czasy i edukacja lwowska miały ogromny wpływ na Orlicza. 12 września 1979 roku na XII Zjeździe Matematyków w Łodzi Orlicz powiedział:

> *Wielokrotnie zadawano mi pytanie w kraju i za granicą, czym można wyjaśnić eksplozywny rozwój matematyki w Polsce po pierwszej wojnie światowej. Jeśli chodzi o środowisko lwowskie, z którego wyszedłem, to można przypuszczać, że wpłynęły na to w jakiś sposób takie czynniki: szeroki zakres zainteresowań matematycznych skoncentrowanych w pierwszym rzędzie na niedawno powstałych lub świeżo się tworzących dziedzinach, bezpośredniość kontaktów mistrzów i uczniów, zamiłowanie do kolektywnej pracy, no i co jest najważniejsze, grono młodych utalentowanych entuzjastów matematyki.*

A w 1981 roku, odnosząc się do czasów lwowskich, powiedział:

> *Teksty oddane do druku np. w marcu, ukazywały się w wydaniu kwietniowym, które kolportowano po świecie już z końcem marca. Dziś na publikację książki matematycznej czeka się 10-12 lat, a czasopisma mają półroczne, jak nie więcej, opóźnienia ....*

Przy otrzymywaniu doktoratu *honoris causa* Politechniki Poznańskiej stwierdził:

> *Proszę Państwa! Przemija postać świata, przemija postać teorii matematycznych. Zmieniają się mody, wczoraj nosiliśmy dżinsy w kolorze niebieskim, dziś w kolorze khaki. Zastanawiam się, czy analiza funkcjonalna dalej będzie miała dość siły atrakcyjnej by przyciągnąć nowych entuzjastów. Od młodej generacji to zależy, przecież różne pojęcia analizy funkcjonalnej dawno zbłądziły pod strzechy, to znaczy weszły do sal wykładowych. Dlatego ja wierzę, że ziarna pięknych idei zasiane przez mistrza Banacha jeszcze długo będą przynosiły plony.*

Innym razem w przemówieniu wygłoszonym podczas uroczystości doktoratu honoris causa UAM w Poznaniu 18 października 1983 roku, cytował Steinhausa:

> *Gdy osiąga się wiek 80 lat w wędrówce do wiecznej przystani, nasuwa się wiele refleksji o tej gałęzi wiedzy ludzkiej, która była mi bardzo bliska przez wiele dziesięcioleci. Czym jest właściwie matematyka, do czego ma służyć, jaki jest jej obraz i jej znaczenie we współczesnym świecie? (...). Mój mistrz i profesor – Hugo Steinhaus, w swej książeczce pt. ,,Kilka słów – Słownik racjonalny", zanotował bardzo mi bliską myśl: ,,Między duchem a materią pośredniczy matematyka". To gdzieś na krawędzi świata materialnego i transcendentnego napotykamy liczby naturalne, proces zliczania, arytmetykę, a indukcja matematyczna pozwala nam wkroczyć w świat pojęć nieskończonościowych.*

4. Konferencje, wykłady, fundacja, film i strony w internecie upamiętniające Orlicza

Dotychczas zorganizowano kilka konferencji i sesji naukowych poświęconych pamięci Władysława Orlicza. Oto one:

1. *Orlicz Memorial Conference*, Uniwersytet Mississippi w Oxford (USA), 21–23 marzec 1991. Odczyty zostały opublikowane w *Proceedings of the Orlicz Memorial Conference* held in Oxford, MS., USA, March 21-23, 1991 (ed. P. Kranz and I. Labuda) Oxford MS., The University of Mississippi, Department of Mathematics (1991), 132 str. Uczestnikami konferencji byli m. in. (por. [M04, zdj. 73): James E. Jamison, Nigel J. Kalton, Stephen Montgomery-Smith, James W. Roberts, Lech Maligranda, Pei-Kee Lin, Iwo Labuda, James Porter, Anna Kamińska, Christopher Lang, Marek Nawrocki, Gerard Buskes, Elias Saab, Joe Diestel, Mohamed A. Khamsi, Michael M. Neumann, Alan Paterson, Tom Burton.

2. *XII Środowiskowa Sesja Naukowa* poświęcona pamięci Prof. W. Orlicza, 24–25 maja 1991 roku w Poznaniu. Wygłoszono szereg odczytów dotyczących W. Orlicza i jego rezultatów w matematyce, a Prof. J. Musielak wygłosił referat *Wspomnienie o Profesorze Władysławie Orliczu* (por. [Se92], str. 290).

3. *Function Spaces V*, Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu, 28 sierpnia - 2 września 1998. W ramach tej międzynarodowej konferencji odbyła się też sesja naukowa poświęcona Władysławowi Orliczowi. Materiały konferencyjne wraz z notą biograficzną [MW00] *L. Maligranda and W. Wnuk, Władysław Orlicz: his life and contributions to mathematics* (strony 23–29), zostały wydrukowane w lipcu 2000 w *Function Spaces* (Proc. Conf. on Function Spaces held in Poznań in 1998), Lecture Notes in Pure and App. Math. No. 213, Marcel Dekker, New York–Basel 2000, 527 stron.

4. *Sesja Naukowa poświęcona pamięci Władysława Orlicza*, Będlewo, 27–29 września 2000. Zorganizował ją Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu, a sesja odbyła się w ośrodku Instytutu Matematycznego PAN w Będlewie. 27 września wieczorem, po lampce wina, miałem 45 minutowy odczyt *Władysław Orlicz – jego życie i wkład do matematyki*, który został opublikowany jako [M02]. Przez następne dwa dni zaprezentowano 15 odczytów wygłoszonych przez znanych matematyków polskich, a materiały opublikowano w *Władysław Orlicz – Twórca Poznańskiej Szkoły Matematycznej* [WO02]. Poinformowano również, że jest też planowana międzynarodowa konferencja w Poznaniu w 2003 roku, w setną rocznicę urodzin Orlicza.

5. *The Władysław Orlicz Centenary Conference and Function Spaces VII*, Poznań, 21–25 lipca 2003. Uczestniczyło w niej około 160 matematyków z całego świata. Wydano kompakt w języku polskim i angielskim z omówieniem życia i dorobku naukowego W. Orlicza oraz ogromną kolekcją zdjęć. Na ceremonii otwarcia konferencji miałem zaszczyt wygłosić odczyt *Władysław Orlicz: his life, work and contribution to mathematics.* Konferencja ta odbywała się pod honorowym patronatem Prezydenta Rzeczpospolitej Polskiej, Pana Aleksandra Kwaśniewskiego. Organizatorem był Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu, a współorganizatorami Komitet Matematyki Polskiej Akademii Nauk, Centrum im. Stefana Banacha w Warszawie, Instytut Matematyki Politechniki Poznańskiej i Polskie Towarzystwo Matematyczne. Konferencja odbyła się w nowym budynku Wydziału Matematyki i Informatyki przy ul. Umultowskiej 87. W tym właśnie budynku, w czasie konferencji, odsłonięto w głównym holu płytę pamiątkową Orlicza, a przed budynkiem zasadzono drzewko Orlicza. Każdy z zaproszonych wykładowców otrzymał Medal Pamiątkowy Orlicza. Mnie też spotkał ten zaszczyt.

Cały nowy budynek Wydziału Matematyki i Informatyki (wraz z biblioteką) został oddany do użytku 30 sierpnia 2002 roku. Jest on spełnieniem marzeń pracowników i studentów tego Wydziału. Uzyskano wspaniałe miejsce do pracy zarówno dydaktycznej, jak i naukowej gdyż budynek jest współcześnie zaprojektowany i harmonijnie wpisuje się w pejzaż. Jest kolejnym obiektem kampusu uniwersyteckiego, umiejscowionego poza miastem, co zwykle w świecie jest naturalnym rozwiązaniem. Słuchając wykładów czy siedząc przy komputerze w gabinecie, można patrzeć na pole i drzewa. Sale wykładowe są też dobrze wyposażone. Kiedy pierwszy raz zawitałem do tego budynku po oficjalnym otwarciu, byłem pod wrażeniem jego lekkości i przestronności. Biblioteka ma naprawdę znakomite zbiory literatury matematycznej. Każdy uniwersytet na świecie byłby dumny z takiej kolekcji. Przy

ostatnim pobycie miło było patrzeć, jak przepiękny budynek akademicki z pracownikami i studentami tętni życiem. Orlicz by się cieszył i gratulował wszystkim. Pewnie by też stwierdził, wypowiadając ulubioną frazę *Panie kolego! Ale kino!*, mając na myśli, że znalazły się pieniądze dla matematyków i oni mogą, zwykle nie zauważani, pracować w warunkach europejskich. Konferencja odbywała się właśnie tutaj. Było to znakomite pokazanie możliwości Polski, a szczególnie Poznania i społeczności akademickiej UAM ludziom z uniwersytetów całego świata. Szczęśliwie też, po konferencji zrobiono profesjonalny film o niej i przesłano kopie na CD niektórym uczestnikom. Polecam obejrzenie.

6. Na Zjeździe Polskiego Towarzystwa Matematycznego (1–5 września 2003) w Poznaniu, w dniu 2 września odbyły się *Wykłady poświęcone pamięci Profesora Władysława Orlicza*, a rozpoczął je W. Wnuk 45 minutowym odczytem *Władysław Orlicz. Trwały ślad wielkiego imienia.*

Powiedzmy teraz parę słów o innych wykładach upamiętniających W. Orlicza. Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu organizuje corocznie w listopadzie *Uroczysty Wykład im. Profesora Władysława Orlicza* połączony z wręczeniem *Medalu Pamiątkowego im. Władysława Orlicza.* Dotychczas odczyt wygłosili i medal otrzymali: Władysław Narkiewicz (1991), Zbigniew Ciesielski (1994), Czesław Olech (1995), Aleksander Pełczyński (1996), Andrzej Schinzel (1997), Kazimierz Urbanik (1998), Stanisław Łojasiewicz (1999), Andrzej Lasota (2000), Bogdan Bojarski (2001), Stanisław Janeczko (2002), Stanisław Kwapień (2003), Stanisław Woronowicz (2004), Henryk Woźniakowski (2005), Józef Siciak (2006) i Andrzej Hulanicki (2007).

Istnieje również *Fundacja Władysława Orlicza.* Fundację założyła żona Profesora Orlicza, Zofia Orlicz, w 1992 roku. Fundacja zarządzana jest przez PTM i nagradza młodych (do 40 lat) matematyków *Nagrodą PTM im. Władysława Orlicza.* Nagrodę im. Władysława Orlicza dotychczas otrzymali: Mieczysław Mastyło (1994), Leszek Skrzypczak (1998) i Paweł Kolwicz (2006). Nagroda ta (dyplom oraz pewna suma pieniędzy) jest wręczana na Zjeździe PTM.

Odnotujmy jeszcze, gdzie można znaleźć informacje o Orliczu w internecie. Istnieje bardzo interesująca i pouczająca strona internetowa, robiona w Szkocji, dotycząca historii matematyki. Może być ona pomocna w uczeniu studentów. Jej adres: *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/*. Zebrane tam są m. in. biografie bardzo wielu matematyków z całego świata. Informacje o Orliczu, jakie miałem zaszczyt napisać, są pod adresem

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Orlicz.html

Napisałem również na stronę internetową Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk w Warszawie *http://www.impan.gov.pl/* w dziale `Outstanding Polish Mathematicians` wystarczy kliknąć na *Władysław Orlicz* i będzie to inna wersja o Orliczu w języku angielskim.
Polskie Towarzystwo Matematyczne Oddział w Poznaniu w części historia:

http://main.amu.edu.pl/∼ptm_poz/historia/index.htm

ma interesujący materiał o Orliczu, wybrany przez W. Wnuka z naszego wspólnego i obszernego artykułu opublikowanego w 2000 roku w Wiadomościach Matematycznych [MW00], z wersjami po polsku, niemiecku i angielsku pod adresami:

http://main.amu.edu.pl/∼ptm_poz/historia/strony/orlicz/polska/orlicz.htm
http://main.amu.edu.pl/∼ptm_poz/historia/strony/orlicz/niemiecka/orlicz.htm
http://main.amu.edu.pl/∼ptm_poz/historia/strony/orlicz/angielska/orlicz.htm

Zapraszam do odwiedzenia tych stron.

5. Doktoraty wykonane pod kierunkiem Orlicza

(daty dotyczą dnia obrony rozprawy)

1. Andrzej **Alexiewicz**, *O ciągach operacji*, 1 maja 1944.
2. Eustachy **Tarnawski**, *Funkcje ciągle z punktu widzenia warunków Höldera i Diniego*, 16 grudnia 1951.
3. Stanisław **Knapowski**, *Zastosowanie metod Turaná w analitycznej teorii liczb*, 30 września 1957.
4. Julian **Musielak**, *O bezwzględnej zbieżności szeregów Fouriera funkcji prawie okresowych wielu zmiennych*, 2 kwietnia 1958.
5. Jozef **Meder**, *Sumowalność i zbieżność szeregów ortogonalnych*, 2 kwietnia 1958.
6. Feliks **Barański**, *O pewnych zagadnieniach jakościowych typu Sturma dla rozwiązań równań liniowych typu eliptycznego rzędu drugiego*, 27 listopada 1958.
7. Jerzy **Albrycht**, *Teoria przestrzeni Marcinkiewicza-Orlicza i pewne jej zastosowanie*, 17 stycznia 1959.
8. Roman **Taberski**, *Aproksymacje całkami osobliwymi funckji lipschitzowskich i zagadnienia pokrewne*, 13 czerwca 1959.
9. Zbigniew **Ciesielski**, *O rozwinięciach ortogonalnych prawie wszystkich funkcji w przestrzeni Wienera*, 7 kwietnia 1960.
10. Wanda **Matuszewska**, *Przestrzenie funkcji φ-całkowalnych*, 14 czerwca 1960.
11. Quan-Fu **Ci**, *Wybrane zagadnienia z teorii funkcji wektorowych*, 30 listopada 1960.
12. Dobiesław **Bobrowski**, *O całkach oscylacyjnych i nieoscylacyjnych pewnych równań różniczkowych*, 8 czerwca 1962.
13. Zbigniew **Polniakowski**, *Wielomianowe transformacje Hausdorffa*, 6 października 1962.
14. Jerzy **Radecki**, *O zmodyfikowanych wielomianach Landau'a i Bernsteina*, 20 grudnia 1962.
15. Henryk **Ratajski**, *Kryteria zbieżności szeregów ortogonalnych o jądrze typu wielomianowego*, 20 grudnia 1962.
16. Marian **Jarosz**, *O zagadnieniach jakościowych dla pewnej klasy równań różniczkowych eliptycznych i hiperbolicznych rzędu drugiego*, 8 maja 1963.
17. Jadwiga **Pawłowska**, *O liniach węzłów rozwiązań pewnych równań eliptycznych rzędu* $2p$, 29 lutego 1964.
18. Henryk **Wiśniewski**, *Oszacowanie całek pewnych układów równań różniczkowych liniowych zwyczjnych*, 29 lutego 1964.
19. Zbigniew **Ratajczak**, *Metody przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych w zastosowaniu do pewnych zagadnień teorii sprężystości*, 27 maja 1964.
20. Adam **Wachułka**, *O pewnych własnościach funkcji poliharmonicznych. Twierdzenie o wartości średniej dla rozwiązań równania różniczkowego cząstkowego quasi p-harmonicznego*, 26 października 1965.
21. Maria **Filar**, *O rozwiązaniu podstawowym dla pewnej klasy równań cząstkowych typu eliptycznego rzędu czwartego i rzędów wyższych*, 16 października 1966.
22. Jurand **Ryterski**, *O pewnych zagadnieniach brzegowych związanych z drganiami łopatek turbin*, 8 grudnia 1966.
23. Aleksander **Waszak**, *Zagadnienia mocnej sumowalności z punktu widzenia metryk Orlicza*, 1 czerwca 1967.
24. Ryszard **Leśniewicz**, *Przestrzenie Hardy'ego-Orlicza*, 4 grudnia 1967.
25. Bogdan **Kotkowski**, *Przestrzenie o normie symetrycznej*, 26 lutego 1969.
26. Henryk **Sampławski**, *Zagadnienia multiplikatorów w przestrzeniach Banacha*, 21 kwietnia 1969.
27. Franciszek **Klorek**, *Funkcje o uogólnionej wariacji*, 17 lutego 1970.
28. Lech **Drewnowski**, *O pewnych zagadnieniach z teorii przestrzeni funkcji całkowalnych*, 19 kwietnia 1971.
29. Barbara **Firlej**, *Zagadnienia aproksymacji funckji w przestrzeniach modularnych*, 14 czerwca 1972.
30. Stanisław **Szufla**, *Równania różniczkowe w przestrzeniach liniowych topologicznych*, 28 grudnia 1972.
31. Marek **Karpiński**, *Wolnostrukturowe automaty dendrytowe*, 15 maja 1973.
32. Iwo **Labuda**, *O pewnych zagadnieniach związanych z twierdzeniami typu Orlicza-Pettisa*, 18 grudnia 1973.
33. Przemysław **Kranz**, *Miary na siatkach*, 12 czerwca 1975.
34. Czesław **Bylka**, *O pewnych klasach φ-funkcji, przestrzeniach Orlicza i ich zastosowaniach*, 30 września 1976.

35. Ryszrd **Serafin**, *O pewnej klasie przestrzeni lokalnie wypukłych związanej z przestrzeniami Saksa i przestrzeniami dwunormowymi*, 19 kwietnia 1978.
36. Wojciech **Friedrich**, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni modularnych*, 12 czerwca 1979.
37. Lech **Maligranda**, *Interpolacja pewnych operatorów nieliniowych w przestrzeniach Banacha*, 17 grudnia 1979.
38. Danuta **Jach**, *Wybrane zagadnienia z przestrzeni Saksa*, 6 listopada 1980.
39. Jarosław **Ciemnoczołowski**, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni funkcji o skończonych wariacjach przy różnych definicjach wariacji*, 9 listopada 1984.

6a. Spis książek Orlicza

[K1] (wspólna z S. Kubraczkiewiczem), *Rachunki do I klasy szkoły powszechnej*, Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1937, 92 strony.

[K2] (wspólna z A. Frejlichem), *Matematika dlya klyasi serednikh zagal'no-osvitnikh shkil*, Państwowe Wydawnictwo Książek Szkolnych we Lwowie 1938, 168 stron (po ukraińsku).

[K3] *Liniowa Analiza Funkcjonalna*, Peking 1963, 138 stron (po chińsku).

[K4] *Linear Functional Analysis*, tłumaczenie z chińskiego książki [K3] przez Lee Peng Yee. Dodatek przez Wu Congxin, Series in Real Analysis 4, World Scientific Publishing Co., Singapore 1992, xvi+246 stron.

[K5] *Władysław Orlicz: Collected Papers. I, II.* With contributions by Wanda Matuszewska and Lech Maligranda, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, lvi+x+1688 stron.

[K6] Władysław Orlicz i Andrzej Alexiewicz dokonali rekonstrukcji książki S. Banacha *Wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej*, Monografie Matematyczne, Tom 17, Warszawa-Wrocław 1951. MR 13,216a. Druk książki był rozpoczęty przed wojną. Miała to być dwutomowa monografia. W wyniku działań okupanta zniszczony został skład 10 pierwszych arkuszy oraz rękopis. Śmierć Banacha 31 sierpnia 1945 roku uniemożliwiła rekonstrukcję dzieła przez niego samego. Orlicz i Alexiewicz uzupełnili brakujące fragmenty tekstu. Znali oni intencje autora z wielu rozmów. Niestety, wobec doszczętnej utraty rękopisu, drugiego tomu nie udał się odtworzyć. Uzupełnienia Orlicza i Alexiewicza obejmują fragmenty dotyczące przestrzeni n-wymiarowej (str. 73-103), funkcji ciągłych (str. 104-114 i 119-122), zbieżności ciągów funkcyjnych (str. 127-130), funkcji Baire'a (str. 144-150) oraz krzywych ciągłych (str. 155-161); reszta książki, to przedruk zachowanych korekt z bardzo nieznacznymi zmianami.

6b. Spis prac Orlicza

[w nawiasie kwadratowym podane zostały strony na jakich dana praca została przedrukowana w WOCP tzn. w *Władysław Orlicz, Collected Papers*]

1926

1. *Zur allgemeinen Limitierungstheorie*, Tohoku Math. J. **26**(1926), 233–237 [WOCP 1–5].

1927

2. *Zur Theorie der Orthogonalreihen*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A 1927, 81–115 [WOCP 6–40].
3. *Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Sér. A 1927, 117–125 [WOCP 41–49].

1929

4. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. **1**(1929), 1–39 [WOCP 50–88].
5. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II*, Studia Math. **1**(1929), 241–255 [WOCP 89–103].

1930

6. *Einige Bemerkungen über die Divergenzpunktmengen von Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. **2**(1930), 72–86 [WOCP 104–118].
7. *Einige Bemerkungen über Divergenzphänomene von Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. **2**(1930), 87–90 [WOCP 119–122].
8. (wspólna z Z.W. Birnbaumem), *Über Approximation im Mittel*, Studia Math. **2**(1930), 197–206 [WOCP 123–132].

1931

9. (wspólna z Z.W. Birnbaumem), *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. **3**(1931), 1–67 [WOCP 133–199].
10. *Über konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Math. **3**(1931), 200–211 [WOCP 200–211].

1932

11. *Quelques théorèmes sur les développements orthogonaux*, C. R. Acad. Sci. Paris **194**(932), 157–158 [WOCP 212–213].
12. *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, C. R. Acad. Sci. Paris **194**(1932), 2118–2120 [WOCP 214–216].
13. *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 207–220 (1932) [WOCP 217–230].
14. *Zur Theorie der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 221–228 (1932) [WOCP 231–238].
15. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (III)*, Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1932, No. 8/9, 229–238 [WOCP 239–248].

1933

16. *Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen*, Studia Math. **4**(1933), 27–32 [WOCP 249–254].
17. *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I)*, Studia Math. **4**(1933), 33–37 [WOCP 255–259].
18. *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II)*, Studia Math. **4**(1933), 41–47 [WOCP 260–266].
19. (wspólna z S. Mazurem), *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sci. Paris **196**(1933), 32–34 [WOCP 267–269].
20. (wspólna z S. Mazurem), *Über Folgen linearer Operationen*, Studia Math. **4**(1933), 152–157 [WOCP 270–275].

1934

21. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (IV)*, Stud. Math. **5**(1934), 1–14 [WOCP 276–289].
22. *Z badań nad układami ortogonalnemi*, Ossolineum, Lwów 1934, 1–15.

1935

23. (wspólna z S. Mazurem), *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen I*, Studia Math. **5**(1935), 50–68 [WOCP 290–308].
24. *Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen*, Studia Math. **5**(1935), 127–140 [WOCP 309–322].
25. *Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen*, Studia Math. **5**(1935), 160–170 [WOCP 323–333].
26. (wspólna z S. Mazurem), *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen II*, Studia Math. **5**(1935), 179–189 [WOCP 334–344].

1936

27. *Über Räume* (L^M), Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A 1936, 93–107 [WOCP 345–359].
28. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (V)*, Studia Math. **6**(1936), 20–38 [WOCP 360–378].
29. (wspólna z S. Mazurem), *Polynomische Operationen in abstrakten Räumen*, C. R. Congrés Int. Math., Oslo 1936, 107–108 [WOCP 379–380].
30. (wspólna z S. Mazurem), *Sur la divisibilité des polynomes abstraits*, C. R. Acad. Sci. Paris **202**(1936), 621–623 [WOCP 381–383].
31. *Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen*, Studia Math. **6**(1936), 98–103 [WOCP 384–389].
32. (wspólna z S. Mazurem), *Sur les fonctionnelles rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **202**(1936), 904–905 [WOCP 390–391].
33. *Über k-fach monotone Folgen*, Studia Math. **6**(1936), 149–159 [WOCP 392–402].

1938

34. *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (VI)*, Stud. Math. **8**(1938), 141–147 [WOCP 403–409].

1940

35. (wspólna z S. Mazurem), *Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque-périodiques*, Studia Math. **9**(1940), 1–16 [WOCP 410–425].

1945

36. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Remarques sur l'equation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Fund. Math. **33**(1945), 314–315 [WOCP 427–427].

1947

37. *Sur les fonctions continues non dérivables*, Fund. Math. **34**(1947), 45–60 [WOCP 428–443].
38. *Une généralisation d'un théorème de MM. S. Banach et S. Mazur*, Ann. Soc. Polon. Math. **19**(1947), 62–65 [WOCP 444–447].

1948

39. *Une généralisation d'un théorème de Cantor-Lebesgue*, Ann. Soc. Polon. Math. **21**(1948), 38–45 [WOCP 448–455].
40. *Sur les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée (I)*, Stud. Math. **10**(1948), 21–39 [WOCP 456–474].
41. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math. **10**(1948), 60–89 [WOCP 475–504].
42. *Sur l'oeuvre scientifique de Stefan Banach. I. Théorie des opérations et théorie des series orthogonales*, Colloq. Math. **1**(1948), 81–92 [WOCP 505–516].
43. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Contribution à la théorie des fonctions abstraites*, Colloq. Math. **1**(1948), 179–180.

44. *Sur la convergence uniforme des développements orthogonaux de fonctions bornées*, Colloq. Math. **1**(1948), 218–224 [WOCP 517–523].

45. *Sur quelques propriétés des fonctions de Baire périodiques*, Studia Math. **10**(1948), 148–158 [WOCP 524–534].

46. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. **35**(1948), 105–126 [WOCP 535–556].

47. (wspólna z S. Mazurem), *Sur les espaces métriques linéaires (I)*, Stud. Math. **10**(1948), 184–208 [WOCP 557–581].

48. *Władysław Michał Nikliborc*, Spraw. Pozn. Tow. Przyj. Nauk **15**(1948), nr 1, 212–214.

1950

49. *Linear operations in Saks spaces. I*, Studia Math. **11**(1950), 237–272 [WOCP 582–617].

1951

50. (wspólna z A. Alexiewiczem), *On analytic vector-valued functions of a real variable*, Studia Math. **12**(1951), 108–111 [WOCP 618–621].

51. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Remarks on Riemann-integration of vector-valued functions*, Studia Math. **12**(1951), 125–132 [WOCP 622–629].

52. *On a class of asymptotically divergent sequences of functions*, Studia Math. **12**(1951), 286–307 [WOCP 630–651].

1952

53. (wspólna z A. Alexiewiczem), *On the differentials in Banach spaces*, Ann. Soc. Polon. Math. **25**(1952), 95–99 [WOCP 652–656].

54. *Drogi rozwoju matematyki polskiej*, Widnokrąg, Tyg. dodatek Gazety Poznańskiej nr 34, 16 VIII 1952, str. 2.

1953

55. *Sur les fonctions satisfaisant á une condition de Lipschitz géneralisée (II)*, Studia Math. **13**(1953), 69–82 [WOCP 657–670].

56. (wspólna z S. Mazurem), *Sur les espaces métriques linéaires (II)*, Studia Math. **13**(1953), 137–179 [WOCP 671–713].

57. *On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions*, Studia Math. **13**(1953), 208–217 [WOCP 714–723].

58. *On functions of finite variation, depending on a parameter*, Studia Math. **13**(1953), 218–232 [WOCP 724–738].

59. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Analytic operations in real Banach spaces*, Studia Math. **14**(1953), 57–78 [WOCP 739–760].

1954

60. *Der Einfluss moderner mathematischer Methoden auf die klassischen Theorien der Mathematik*, Die Hauptreferate des 8 Polnischen Mathematikerkongresses vom 6 bis 12 September 1953 in Warschau, §4, Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954, 61–66; po polsku: Prace Mat. **2**(1958), 19–24.

61. (wspólna z S. Mazurem), *On linear methods of summability*, Studia Math. **14**(1954), 129–160 [WOCP 761–792].

62. *On a class of operations over the space of continuous vector valued functions*, Studia Math. **14**(1955), 285–297 [WOCP 793–805].

63. *On a class of operations over the space of integrable functions*, Studia Math. **14**(1954), 302–309 [WOCP 806–813].

1955

64. (wspólna z A. Alexiewiczem), *On a theorem of C. Carathéodory*, Ann. Polon. Math. **1**(1955), 414–417 [WOCP 814–817].

65. (wspólna z A. Alexiewiczem), *On summability of double sequences (I)*, Ann. Polon. Math. **2**(1956), 170–181 [WOCP 818–829].

66. *O szeregach doskonale zbieżnych w pewnych przestrzeniach funkcyjnych*, Prace Mat. **1**(1955), 393–414 (po polsku); angielskie tłumaczenie *On perfectly convergent series in certain functional spaces*, w: *Władysław Orlicz Collected Papers*, Warszawa 1988, 830–850.

67. *Linear operations in Saks spaces (II)*, Studia Math. **15**(1955), 1–25 [WOCP 851–875].

1956

68. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, Studia Math. **15**(1956), 201–215 [WOCP 876–890].

69. (wspólna z J. Musielakiem), *Linear functionals over the space of functions continuous in an open interval*, Studia Math. **15**(1956), 216–224 [WOCP 891–899].

1957

70. (wspólna z V. Ptakiem), *Some remarks on Saks spaces*, Studia Math. **16**(1957), 56-68 [WOCP 900–912].
71. *On the continuity of linear operations in Saks spaces with an application to the theory of summability*, Studia Math. **16**(1957), 69–73 [WOCP 913–917].
72. *Contribution to the theory of Saks spaces*, Fund. Math. **44**(1957), 270–294 [WOCP 918–942].
73. (wspólna z J. Musielakiem), *On spaces of functions of finite generalised variation*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III **5**(1957), 389–392 [WOCP 943–946].
74. (wspólna z W. Matuszewska), *On a class of Saks spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **5**(1957), 611–614 [WOCP 947–950].
75. *On perfect convergence in certain Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III **5**(1957), 779–782 [WOCP 951–954].

1958

76. *On the summability of bounded sequences by continuous methods*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **6**(1958), 549–556 [WOCP 955–962].
77. (wspólna z Z. Ciesielskim), *Some remarks on the convergence of functionals on bases*, Studia Math. **16**(1958), 335–352 [WOCP 963–980].
78. (wspólna z S. Mazurem), *On some classes of linear spaces*, Studia Math. **17**(1958), 97–119 [WOCP 981–1003].
79. *Funktionalanalysis und allgemeine Theorie der linearen Transformationen*, Colloque sur la Théorie des Suites, tenu á Bruxelles du 18 au 20 déc. 1957, Centre Belge Rech. Math. 1958, 121–147 [WOCP 1004–1020].

1959

80. (wspólna z J. Musielakiem), *On generalized variations (I)*, Studia Math. **18**(1959), 11–41 [WOCP 1021–1051].
81. (wspólna z J. Musielakiem), *On modular spaces*, Studia Math. **18**(1959), 49–65 [WOCP 1052–1068].
82. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Consistency theorems for Banach space analogues of Toeplitzian methods of summability*, Studia Math. **18**(1959), 199–210 [WOCP 1069–1080].
83. (wspólna z A. Alexiewiczem), *On summability of double sequences (II)*, Ann. Polon. Math. **6**(1959), 171–180 [WOCP 1081–1090].
84. (wspólna z W. Matuszewską), *On the local tests for convergence of Fourier series*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **7**(1959), 549–556 [WOCP 1091–1098].
85. (wspólna z J. Musielakiem), *Some remarks on modular spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **7**(1959), 661–668 [WOCP 1099–1106].
86. *Saks-space and its applications in the theory of linear operators*, Acta Math. Sinica **9**(1959), 143–149 (po chińsku); angielskie tłumaczenie w Chinese Math. **9**(1967), 463–469 (1968).
87. *On the generation of l^α-space and L^α-space*, Acta Math. Sinica **9**(1959), 150–155 (po chińsku); angielskie tłumaczenie w Chinese Math. **9**(1967), 470–475 (1968).
88. *Ciągi operacji liniowych zależne od parametru*, Trzeci Wszechzwiązkowy Kongres Matematyków w Moskwie, 25 czerwca – 5 lipca 1956, Trudy Tret'ego Vsesoyuzn. Mat. Sjezda, Moskva 1959, 185–188 (po rosyjsku).

1960

89. *Über lokale Konvergenzkriterien der Fourierreihen*, Unione Matematica Italiana, Atti del VI Congresso, Napoli 1959, Ed. Cremonese, Roma 1960, 331.
90. (wspólna z A. Alexiewiczem), *Inequalities for functionals in locally convex linear spaces*, Zeszyty Nauk. Uniw. im. A. Mickiewicza, Mat. Fiz. Chem. **2**(1960), 9–13 [WOCP 1107–1111].
91. (wspólna z W. Matuszewską), *On certain properties of φ-functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8**(1960), 439–443 [WOCP 1112–1116].
92. (wspólna z J. Musielakiem), *A generalization of certain extension theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8**(1960), 531–534 [WOCP 1117–1120].
93. *Operations and linear functionals in spaces of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8**(1960), 563–565 [WOCP 1121–1123].
94. *On integral representability of linear functionals over the space of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8**(1960), 567–569 [WOCP 1124–1126].

95. *Some remarks on the absolute convergence of biorthogonal expansions in the space C*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös Sect. Math. **3-4**(1960/61), 217–222 [WOCP 1127–1132].

1961

96. *On spaces of φ-integrable functions*, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, held at the Hebrew University of Jerusalem, July 5-12, 1960; Academic Press, Jerusalem 1961, 357–365 [WOCP 1133–1141].
97. *A note on modular spaces. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **9**(1961), 157–162 [WOCP 1142–1147].
98. (wspólna z W. Matuszewską), *A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions*, Studia Math. **21**(1961), 107–115 [WOCP 1148–1156].

1962

99. *Über gewisse Klassen von Modularräumen*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague 1961), Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague 1962, 295.
100. (wspólna z J. Albrychtem), *A note on modular spaces. II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **10**(1962), 99–106 [WOCP 1157–1164].
101. (wspólna z J. Albrychtem), *A note on modular spaces. III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **10**(1962), 153–157 [WOCP 1165–1169].
102. *A note on modular spaces. IV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **10**(1962), 479–484 [WOCP 1170–1175].
103. (wspólna z J. Musielakiem), *On modular spaces of strongly summable sequences*, Stud. Math. **22**(1962), 127–146 [WOCP 1176–1195].
104. Book review *"G. Alexits: Convergence Problems of Orthogonal Series"*, Acta Sci. Math. (Szeged) **23**(1962), 176–178.

1963

105. *On some spaces of strongly summable sequences*, Studia Math. **22**(1963), 331–336 [WOCP 1196–1201].
106. (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. V*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **11**(1963), 51–54 [WOCP 1202–1205].
107. (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. VI*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **11**(1963), 449–454 [WOCP 1206–1211].

1964

108. *A note on modular spaces. VII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **12**(1964), 305–309 [WOCP 1212–1216].

1965

109. *Stanisław Mazur*, Nauka Polska **13**(1965), 41–46.
110. *Stefan Kaczmarz*, Polski Słownik Biograficzny PAN **11**(1964-1965), 387.
111. (wspólna z W. Matuszewską), *On some classes of functions with regard to their orders of growth*, Studia Math. **26**(1965), 11–24 [WOCP 1217–1230].
112. *On the convergence of norms in spaces of φ-integrable functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **13**(1965), 205–210 [WOCP 1231–1236].
113. *Referat o działalności naukowej prof. Hugo Steinhausa wygloszony przy nadaniu doktoratu honorowego przez Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu*, Wiadom. Mat. **8**(1965), 115–118.

1966

114. *On some classes of modular spaces*, Studia Math. **26**(1966), 165–192 [WOCP 1237–1264].
115. *A note on modular spaces. VIII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **14**(1966), 151–158 [WOCP 1265–1272].

1967

116. (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **15**(1967), 329–337 [WOCP 1273–1281].
117. (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. II*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **15**(1967), 723–730 [WOCP 1282–1289].
118. *Komentarz do pracy S. Banacha, Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math. 3(1931), 174-179*, w: *Stefan Banach Oeuvres Vol. I*, PWN, Warszawa 1967, 348–349 (po francusku).

1968

119. (wspólna z J. Musielakiem), *Notes on the theory of integral. III*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16**(1968), 317–326 [WOCP 1290–1299].

120. (wspólna z W. Matuszewską), *A note on modular spaces. IX*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16**(1968), 801–808 [WOCP 1300–1307].

121. (wspólna z L. Drewnowskim), *A note on modular spaces. X*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16**(1968), 809–814 [WOCP 1308–1313].

122. (wspólna z L. Drewnowskim), *A note on modular spaces. XI*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16**(1968), 877–882 [WOCP 1314–1319].

123. (wspólna z L. Drewnowskim), *On orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16**(1968), 883–888 [WOCP 1320–1325].

124. *On some classes of finitely additive set functions*, Prace Mat. **11**(1968), 317–327 [WOCP 1326–1336].

125. *On spaces $L^{*\varphi}$ based on the notion of a finitely additive integral*, Prace Mat. **12**(1968), 99–113 [WOCP 1337–1351].

126. *Absolute continuity of vector-valued finitely additive set functions. I*, Studia Math. **30**(1968), 121–133 [WOCP 1352–1364].

1969

127. *O pracach teoretycznych H. Steinhausa z zakresu matematyki*, Wiadom. Mat. **11**(1969), 77–80.

128. (wspólna z L. Drewnowskim), *On representation of orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **17**(1969), 167–173 [WOCP 1365–1371].

129. (wspólna z L. Drewnowskim), *Continuity and representation of orthogonally additive functionals*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **17**(1969), 647–653 [WOCP 1372–1378].

1970

130. *Absolute continuity of set functions with respect to a finitely subadditive measure*, Comment. Math. Prace Mat. **14**(1970), 101–118 [WOCP 1379–1396].

131. *Notes on the theory of integral. IV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **18**(1970), 589–596 [WOCP 1397–1404].

1971

132. (wspólna z B. Kotkowskim), *A note on modular spaces. XII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **19**(1971), 817–822 [WOCP 1405–1410].

133. (wspólna z B. Kotkowskim), *A note on modular spaces. XIII*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **19**(1971), 823–829 [WOCP 1411–1417].

1972

134. (wspólna z W. Matuszewską), *On the Riesz-Fischer theorem for vector-valued functions*, Studia Math. **44**(1972), 149–164 [WOCP 1418–1433].

1973

135. *Antoni Łomnicki*, Polski Słownik Biograficzny PAN **18**(1973), 388–389.

136. (wspólna z R. Leśniewiczem), *On generalized variations. II*, Studia Math. **45**(1973), 71–109 [WOCP 1434–1472].

137. *Matematyka w Ośrodku Poznańskim (1919-1969)*, w: Nauka w Wielkopolsce. Przyszłość i Teraźniejszość, red. G. Labuda, Wydawnictwo Poznańskie, Poznań 1973, 199–230.

1974

138. (wspólna z I. Labudą), *Some remarks on Saks spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **22**(1974), 909–914 [WOCP 1473–1478].

139. (wspólna z R. Leśniewiczem), *A note on modular spaces. XIV*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **22**(1974), 915–923 [WOCP 1479–1487].

1975

140. (wspólna z W. Matuszewską), *Modulus of continuity of a set function and some of its applications*, Ann. Polon. Math. **29**(1975), 411–419 [WOCP 1488–1496].

1978

141. (wspólna z C. Bylką), *On some generalizations of the Young inequality*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **26**(1978), 115–123 [WOCP 1497–1505].

142. *Juliusz Paweł Schauder, 1899-1943*, J. P. Schauder, Oeuvres, PWN, Warszawa 1978, 9–10 [WOCP 1506–1507].

1979

143. (wspólna z S. Szuflą), *On the convergence of successive approximations for nonlinear equations in function spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **27**(1979), 153–156 [WOCP 1508–1511].

1980

144. (wspólna z H. Hudzikiem i R. Urbańskim), *Interpolation of sublinear, bounded operators in sequence spaces $h_M(X)$ of nonsymmetric type*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **28**(1980), 45–54 [WOCP 1512–1521].

145. (wspólna z R. Urbańskim), *A generalization of the Brooks-Jewett theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **28**(1980), 55–59 [WOCP 1522–1526].

146. (wspólna z R. Urbańskim), *On σ-additivity of set functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **28**(1980), 447–452 [WOCP 1527–1532].

147. *Przemówienie wygłoszone przy nadaniu doktoratu honorowego Politechniki Poznanskiej*, Wiadom. Mat. **22**(1980), 279–284.

1981

148. *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym*, Wiadom. Mat. **23**(1981), 222–231.

149. (wspólna z S. Szuflą), *Generic properties of infinite system of integral equations in Banach spaces*, Ann. Polon. Math. **40**(1981), 67–79 [WOCP 1533–1545].

1982

150. *Metoda kategorii Baire'a w zastosowaniu do pewnych zagadnień analizy*, Wiadom. Mat. **24**(1982), 1–15.

151. (wspólna z S. Szuflą), *On some classes of nonlinear Volterra integral equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **30**(1982), 239–250 [WOCP 1546–1557].

1983

152. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *On some classes of vector valued functions of bounded weak variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **31**(1983), 335–344 [WOCP 1558–1567].

153. (wspólna z D. Jach), *Some classes on Saks spaces*, Comment. Math. Prace Mat. **23**(1983), 41–48 [WOCP 1568–1575].

154. (wspólna z W. Matuszewską), *On a class of linear functionals which are modular continuous*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **31**(1983), 345–352 [WOCP 1576–1583].

155. (wspólna z R. Urbańskim), *Total variation of a set-valued measure*, Comment. Math. Prace Mat. **23**(1983), 85–89 [WOCP 1584–1588].

156. *O pracach Stanisława Mazura z teorii sumowalności.* Orlicz wygłosił odczyt pt. *Wkład Stanisława Mazura w ogólną teorię limesowalności* na *Sesji naukowej dla uczczenia pamięci Stanisława Mazura* w Warszawie w dniach 3-4 listopada 1983 roku. Praca ta jest nieopublikowa, ale rękopis 13 stronicowy jest w posiadaniu autora.

1984

157. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Inclusion theorems for classes of functions of generalized bounded variations*, Comment. Math. Prace Mat. **24**(1984), 181–194 [WOCP 1589–1602].

158. (wspólna z S. Szuflą), *On the structure of L_φ-solution sets of integral equations in Banach spaces*, Studia Math. **77**(1984), 465–477 [WOCP 1603–1615].

159. *Achievements of Polish mathematicians in the domain of functional analysis in the years 1919-1951*, w: *Władysław Orlicz Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 1616–1641.

160. *Zbigniew Polniakowski (1925-1977)*, Wiadom. Mat. **25**(1984), 247–253.

1985

161. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Variation and compactness*, Comment. Math. Prace Mat. **25**(1985), 201–214 [WOCP 1642–1655].

162. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Functions of bounded φ-variation and some related operators*, Demonstratio Math. **18**(1985), 231–251 (1985) [WOCP 1656–1670]..

163. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Subseries convergence in the space of functions of bounded φ-variation*, Resultate Math. **8**(1985), 1–8 [WOCP 1671–1678].

164. *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, Wiadom. Mat. **26**(1985), 155–164 [WOCP 1679–1688].

165. *Fragmenty przemówienia wygłoszonego podczas uroczystości doktoratu h. c. w Poznaniu*, Wiadom. Mat. **26**(1985), 165–169.

1986

166. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *Composing functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **96**(1986), 431–436.

167. (wspólna z R. Grząślewiczem i H. Hudzikiem), *Uniform non-$\ell_n^{(1)}$ property in some normed spaces*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **34**(1986), 161–171.

168. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim), *A Lindenstrauss-Stegall theorem for φ-variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **34**(1986), 173–180.

1987

169. (wspólna z L. Maligrandą), *On some properties of functions of generalized variation*, Monatsh. Math. **104**(1987), 53–65.

170. (wspólna z W. Matuszewską), *On property B_1 for functions of bounded φ-variation*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **35**(1987), 57–69.

171. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim i W. Matuszewską), *Some properties of functions of bounded φ-variation and of bounded φ-variation in the sense of Wiener*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **35**(1987), 185–194.

1990

172. (wspólna z J. Ciemnoczołowskim i W. Matuszewską), *On some properties of linear operators on $L^{*\varphi}$ which are continuous with respect to a modular*, Comment. Math. Prace Mat. **30**(1990), 27–39.

173. *On decomposability of elements into positive elements in normed spaces of continuous functions*, Math. Japon. **35**(1990), 1019–1029.

1991

174. (wspólna z W. Wnukiem), *Absolutely continuous and modularly continuous operators defined on spaces of measurable functions*, Ricerche Math. **40**(1991), 243–258.

1992

175. (wspólna z W. Matuszewską), *On some properties of functions of bounded φ-variation in the sense of Riesz*, Comment. Math. Prace Mat. **32**(1992), 91–102.

1996

176. *Osiągnięcia polskiej matematyki w zakresie analizy funkcjonalnej*, w: Historia Nauki Polskiej Wiek XX. Nauki Ścisłe, PAN, Instytut Historii Nauki, Warszawa 1996, 129–151 (polska wersja artykułu [157]).

Ponadto Orlicz wygłosił następujące odczyty bądź na Posiedzeniach PTM we Lwowie, Poznaniu, Warszawie, Krakowie, Wrocławiu, Lublinie, Toruniu, Gdańsku, Szczecinie odnotowane w rocznikach PTM, bądź na Kongresach PTM z wydrukowanym streszczeniem, bądź na posiedzeniach naukowych Towarzystwa Naukowego we Lwowie, bądź w Colloquium Mathematicum (w kolejności daty odczytu) :

1. *O pewnym twierdzeniu z teorii szeregów sumowalnych* (odczyt Lwów, 2 XII 1924), Sprawozdanie z działalności Oddziału Lwowskiego PTM za czas od 18 X 1923–31 XI 1925, w: Dodatek do Rocznika PTM **3**(1927), 5.
2. *Sur la théorie des séries orthogonales* (odczyt Lwów, 8 VI 1926), Ann. Soc. Polon. Math. **6**(1927), 124 [Kraków 1928].
3. *Sur la convergence des développements orthogonaux* (odczyt Lwów, 15 VI 1926), Ann. Soc. Polon. Math. **6**(1927), 124 [Kraków 1928].
4. *Sur la phénomène de M. Carleman* (odczyt Lwów, 9 X 1926), Ann. Soc. Polon. Math. **6**(1927), 124 [Kraków 1928].
5. *O przeciętnej zbieżności rozwinięć ortogonalnych*, w: Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematyków (Lwów, 7-10 IX 1927), Fundusz Kultury Narodowej, Kraków 1929, 118.
6. *Aus der Theorie der Orthogonalreihen* (odczyt Lwów, 10 XII 1927), Ann. Soc. Polon. Math. **9**(1930), 175 [Kraków 1931].
7. *Über einen Satz aus der Theorie der Funktionale und seine Anwendungen auf die Theorie der Orthogonalreihen* (odczyt Lwów, 10 XI 1928), Ann. Soc. Polon. Math. **9**(1930), 183 [Kraków 1931].
8. (wspólnie z Z. W. Birnbaumem), *Über konjugierte Funktionen* (odczyt Lwów, 21 X 1930), Ann. Soc. Polon. Math. **9**(1930), 202–203 [Kraków 1931].
9. (wspólnie z Z. W. Birnbaumem), *Über Approximation von Funktionen im Mittel* (odczyt Lwów, 21 X 1930), Ann. Soc. Polon. Math. **9**(1930), 203 [Kraków 1931].
10. *Eindrücke aus meinem zweijährigen Aufenthalt in Göttingen* (odczyt Lwów, 30 X 1930), Ann. Soc. Polon. Math. **9**(1930), 204 [Kraków 1931].
11. *Über eine Klasse von konjugierten Räumen* (odczyt Lwów, 10 I 1931), Ann. Soc. Polon. Math. **10**(1931), 123 [Kraków 1932].
12. *Über eine Klasse von Räumen vom Typus (B)* (odczyt Lwów, 17 III 1931), Ann. Soc. Polon. Math. **10**(1931), 124–125 [Kraków 1932].
13. *Über unbedingt konvergente Reihen in Vektorräumen* (odczyt Lwów, 2 VI 1931), Ann. Soc. Polon. Math. **10**(1931), 126 [Kraków 1932].
14. *Zur Theorie der Orthogonalreihen* (odczyty Lwów, 16 I 1932 i 26 III 1932), Ann. Soc. Polon. Math. **12**(1933), 113-114 i 115 [Kraków 1934].
15. (wspólnie z S. Mazurem) *Über lineaire Limiterungsverfahren I, II* (odczyty Lwów, 12 XI 1932 i 17 XII 1932), Ann. Soc. Polon. Math. **12**(1933), 116 i 117 [Kraków 1934].
16. (wspólnie z S. Mazurem) *Über leine Klasse von metrischen, lineare Räumen I, II* (odczyty Lwów, 17 X 1933 i 28 X 1933), Ann. Soc. Polon. Math. **12**(1933), 119 i 120 [Kraków 1934].

17. (wspólnie z S. Mazurem) *Über abstrakte Polynome* (odczyt Lwów, 21 XII 1933), Ann. Soc. Polon. Math. **12**(1933), 120 [Kraków 1934].
18. (wspólnie z S. Mazurem) *Über das Verhalten von Polynomen in konvexen Mengen* (odczyt Lwów, 17 II 1934), Ann. Soc. Polon. Math. **13**(1934), 142 [Kraków 1935].
19. *Zur Theorie der Orthogonalreihen* (odczyt Lwów, 10 III 1934), Ann. Soc. Polon. Math. **13**(1934), 142 [Kraków 1935].
20. *Zur Theorie der Orthogonalreihen* (odczyt Lwów, 16 IV 1934), Ann. Soc. Polon. Math. **13**(1934), 142 [Kraków 1935].
21. *Zur Theorie der Orthogonalreihen* (odczyt Lwów, 26 V 1934), Ann. Soc. Polon. Math. **13**(1934), 143 [Kraków 1935].
22. (wspólnie z S. Mazurem) *Über rationale Operationen* (odczyt Lwów, 24 XI 1934), Ann. Soc. Polon. Math. **13**(1934), 145 [Kraków 1935].
23. *Sur les transformations linéaires* (odczyt Lwów, 29 III 1935), Ann. Soc. Polon. Math. **15**(1936), 181 [Kraków 1937].
24. *Sur une généralisation de espaces* (L') (odczyt Lwów, 25 I 1936), Ann. Soc. Polon. Math. **15**(1936), 181 [Kraków 1937].
25. *Sur les problèmes de la théorie générale des systèmes orthogonaux* (odczyt Poznań, 20 II 1937), Ann. Soc. Polon. Math. **15**(1937), 225-226 [Kraków 1938].
26. (wspólnie z S. Mazurem) *Sur les espaces métriques linéaires* (odczyt na III Kongresie Matematyków Polskich, Warszawa 28 IX-3 X 1937), Ann. Soc. Polon. Math. **16**(1937), 195 [Kraków 1938].
27. *Sur les fonctions continues sans dérivée* (odczyt Poznań, 6 XII 1937), Ann. Soc. Polon. Math. **16**(1937), 227 [Kraków 1938].
28. *Sur les fonctions continues sans dérivées* (odczyt Poznań, IX 1939), Ann. Soc. Polon. Math. **19**(1946), 227 [Kraków 1947].
29. *Sur les fonctions remplissant la condition généralisée de Lipschitz* (odczyt Kraków, 10 IV 1945), Ann. Soc. Polon. Math. **18**(1945), 160-161.
30. *Sur l'espace des fonctions bornées* (odczyt Kraków, 10 IV 1945), Ann. Soc. Polon. Math. **18**(1945), 161.
31. *Sur les fonctions continues sans dérivées* (odczyt Kraków, 23 X 1945), Ann. Soc. Polon. Math. **19**(1946), 220 [Kraków 1947].
32. *Une généralisation un théorème de Cantor-Lebesgue* (odczyt Kraków, 20 XI 1945), Ann. Soc. Polon. Math. **19**(1946), 222 [Kraków 1947].
33. *Les opérations linéaires dans l'espaces des fonctions bornées* (odczyt Wrocław, 31 V 1946), Ann. Soc. Polon. Math. **19**(1946), 235-236 [Kraków 1947] i Colloq. Math. 1(1948), 37.
34. *Une généralisation d'un theéorème de MM. S. Banach et S. Mazur* (odczyt Kraków, 3 XII 1946), Ann. Soc. Polon. Math. **20**(1947), 398 [Kraków 1948].
35. *Sur l'oeuvre scientifique de Stefan Banach* (odczyt Wrocław, 13 XII 1946 na IV Polskim Zjeździe Matematycznym, 12-14 XII 1946), Colloq. Math. **1**(1948), 158.
36. (wspólnie z A. Alexiewiczem) *Contribution à la théorie des fonctions abstraites* (odczyt Wrocław, 14 XII 1946 na IV Polskim Zjeździe Matematycznym, 12-14 XII 1946), Colloq. Math. **1**(1948), 179-180.
37. *O pewnej klasie ciągów funkcyjnych rozbieżnych asymptotycznie* (odczyt Kraków, 29 V 1947 na V Zjeździe Matematyków Polskich, 29-31 V 1947), Dodatek do Rocznika PTM **21**(1950), 21 oraz odnośnik w pracy [52], str. 286 [WOCP 630].
38. *O pewnej klasie ciągów i operacji* (odczyt Warszawa, 26 IX 1948 na VI Zjeździe Matematyków Polskich, 20-23 IX 1948), Dodatek do Rocznika PTM **22**(1950), 57 oraz odnośniki w pracach [49], str.237 i [67], str. 1 [WOCP 582 i 851].
39. *Remarque du domaine de l'analise fonctionelle* (odczyt Warszawa, 19 XI 1948), Ann. Soc. Polon. Math. **22**(1949), 296 [Kraków 1950].
40. *Sur les suites des opérations dépendant d'un paramétre* (odczyt Lublin, 1 VII 1949), Ann. Soc. Polon. Math. **22**(1949), 293 [Kraków 1950].
41. *Sur les relations scientifiques polono-soviétiques* (odczyt Poznań, 25 X 1949), Ann. Soc. Polon. Math. **23**(1950), 290.
42. (wspólnie z A. Alexiewiczem) *Analytic vector-valued functions of a real variable* (odczyt Poznań, 31 III 1950), Ann. Soc. Polon. Math. **23**(1950), 291.

43. (wspólnie z A. Alexiewiczem) *Riemann integration of vector-valued functions* (odczyt Poznań, 19 V 1950), Ann. Soc. Polon. Math. **23**(1950), 291.
44. *Les travaux de M. Steinhaus sur la théorie des séries orthogonales et l'analyse fonctionelle* (odczyt Wrocław, 11 V 1951), Ann. Soc. Polon. Math. **24**(1951), 195 [Kraków 1952] i Colloq. Math. 3(1955), 82.
45. *Sur l'oeuvre scientifique de M. Lavrentieff* (odczyt Warszawa, 9 X 1951), Colloq. Math. **3**(1955), 118.
46. *On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions* (odczyt Warszawa, 9 V 1952), Colloq. Math. **3**(1955), 122.
47. *Les résultats de la mathématique soviétique dans la théorie constructive des fonctions* (odczyt Poznań, 29 XI 1952), Colloq. Math. 3(1955), 183.
48. *Sur les problèmes d'approximation* (odczyt Toruń, 26 VIII 1953), Colloq. Math. **3**(1955), 114.
49. (wspólnie z J. Albrychtem i W. Matuszewską) *Résultats de recherches des mathématiciens soviétiques dans le domaine de l'analyse fonctionnelle* (odczyt Poznań, 6 XI 1953), Colloq. Math. **3**(1955), 112.
50. *Sur les séries parfaitement convergentes dans des espace fonctionnels* (odczyt Lublin, 3 IV 1954), Colloq. Math. **4**(1957), 104.
51. *Sur quelques problèmes de la théorie générale de limitation* (odczyt Gdańsk, 22 V 1954), Colloq. Math. **4**(1957), 102.
52. *Sur les suites d'operations linéaires et pseudolinéaires* (odczyt Gdańsk, 24 V 1954), Colloq. Math. **4**(1957), 102.
53. (wspólnie z J. Musielakiem) *Sur les fonctionnelles dans certains espaces de Saks* (odczyt Poznań, 22 III 1955), Colloq. Math. **3**(1955), 257.
54. (wspólnie z J. Musielakiem) *Sur les fonctionnelles dans les espaces des fonctions continues* (odczyt Toruń, 21 V 1955), Colloq. Math. **3**(1955), 260.
55. *Souvenir du feu Professeur Z. Krygowski* (odczyt Poznań, 17 XI 1955), Colloq. Math. **5**(1958), 252.
56. *Impressions du voyage en Tchécoslovaquie* (odczyt Poznań, 17 XI 1955), Colloq. Math. **5**(1958), 252.
57. *Impressions du Collegue de Moscou consacré à l'analyse fonctionnelle et ses applications (17-24 I 1956)* (odczyt Poznań, 28 III 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 252.
58. *Résultats des mathématiciens soviétiques au jour des derniers congrès scientifiques de Moscou* (odczyt Gdańsk, 7 IX 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 240.
59. *Sur quelques problèmes de l'analyse fonctionnelle* (odczyt Gdańsk, 8 IX 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 240.
60. *Mot d'ouverture à la 100-ème séance de la Section de Poznań de la Société Polonaise de Mathématique* (odczyt Poznań, 11 X 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 256.
61. *Sur certains travaux des mathématiciens soviétiques dans le domaine de l'analyse fonctionnelle (à l'occasion du IIIme Congrès des mathématiciens de l'URSS à Moscou de 25. VI au 1. VII. 1956 et du IVme Congrès des Mathématiciens Autrichiens à Vienne du 17 au 22. IX. 1956)* (odczyt Poznań, 11 X 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 257.
62. *Sur les espaces de Saks* (odczyt Szczecin, 22 X 1956), Colloq. Math. 5(1958), 259.
63. *Sur certain travaux des mathématiciens soviétiques dans le domaine de l'analyse fonctionnelle* (odczyt Szczecin, 22 X 1956), Colloq. Math. **5**(1958), 259.
64. *Drogi rozwoju matematyki w Polsce* (odczyt dla nauczycieli 1956), Wiadom. Mat. **2**(1959), 328.
65. (wspólnie z J. Musielakiem) *On spaces of functions of finite generalised variation*, odczyt 9 I 1957 na konferencji *Symposium on Functional Analysis*, Zakopane (8-19 I 1957), odnośnik w pracy [73], str. 389 [WOCP 943].
66. (wspólnie z J. Musielakiem) *Pewne uwagi o przestrzeniach modularnych*, odczyt 8 X 1959 na konferencji z Algebry Topologicznej, Wrocław (8-10 X 1959), Colloq. Math. **7**(1960), 314.
67. *Teoria całki o wartościach wektorowych* (odczyt Szczecin, 27 V 1967), Wiadom. Mat. **11**(1969), z. 1, 147.
68. *Wrażenia z podróży naukowej do Austrii* (odczyt Poznań, 4 X 1968), Wiadom. Mat. **12**(1969), z. 1, 196.
69. *Przemówienie wstępne W. Orlicza* na Jubileuszu 20-lecia Instytutu Matematycznego PAN oraz 50-lecia pracy naukowej Kazimierza Kuratowskiego, (Warszawa 23 XI 1968), Wiadom. Mat. **12**(1969), 78-79.
70. *Metoda kategorii Baire'a w pewnych zagadnieniach analizy*, Wykład im. Wacława Sierpińskiego (Warszawa, 27 IV 1979), Wiadom. Mat. **23**(1980), nr 1, 96.
71. *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym*, (odczyt na XII Zjeździe Matematyków Polskich, Łódź 12-14 IX 1979), Wiadom. Mat. **23**(1981), nr 2, 213-222 i artykuł Orlicza jest na stronach 222-231.

7. Materiały źródłowe o Orliczu

Uczniowie, współpracownicy, historycy nauki i zawodowi dziennikarze są autorami licznych artykułów oraz wywiadów prasowych prezentujących życie i działalność naukową Władysława Orlicza. Powstawały one m.in. z okazji różnych rocznic i uroczystości poświęconych Profesorowi. Także w publikacjach Władysława Orlicza o historii i dokonaniach matematyki polskiej znajdują się informacje o nim samym. W latach 80-tych został zrealizowany film dokumentalny o Profesorze. Poniżej podaję wszelkie mi znane materiały źródłowe na które natrafiłem, przy czym najpierw podane zostały te znaczące źródła mające dużo więcej informacji bądź zdjęć od pozostałych.

7a. Źródła obszerne

[Ar91] Materiały Władysława Orlicza w Archiwum PAN–Oddział w Poznaniu, sygn. P. III–91.

[B88] G. Banaszkiewicz, *Przestrzenie*, Intrepress-film, Telewizja Poznań 1988, 20 min.

[M02] L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903–1990) – jego życie i wkład do matematyki*, w: *Władysław Orlicz – Twórca Poznańskiej Szkoły Matematycznej* pod redakcją Jerzego Kąkola i Zbigniewa Palki, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002, 33–80.

[M03] L. Maligranda, *Władysław Orlicz – w setną rocznicę urodzin*, Matematyka **4**(2003), 196–202.

[M04] L. Maligranda, *Setna rocznica urodzin Władysława Orlicza (1903-1990)*, w: *Matematyka Abelowa*, XVII Ogólnopolska Szkoła z Historii Matematyki, Nowy Sącz, 9-13 VI 2003, pod redakcją W. Więsława, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Nowy Sącz 2004, 73–126.

[M08] L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903-1990) – Polish mathematician*, In: Banach Center Publ. **82** (Proc, of the conf. *Lvov Mathematical School in the Period 1915-45 as Seen Today*, Aug. 8-15, 2005, Będlewo, Poland), Warszawa 2007, w druku (16 stron).

[MM88] L. Maligranda i W. Matuszewska, *A survey of Władysław Orlicz's scientific work*, w: *Wladyslaw Orlicz, Collected Papers*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, xv-liv.

[MW00] L. Maligranda i W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, Wiadom. Mat. **36**(2000), 85–147.

[MW03] L. Maligranda i W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, wersja polska i angielska na kompakcie na konferencję *The Władysław Orlicz Centenary Conference and Function Spaces VII*, Poznań, 21–25 lipca 2003.

[OAr] W. Orlicz, Archiwum Obwodowe we Lwowie, f. 26, op. 5, spr. 1416.

7b. Pozostałe źródła lub informacje o Orliczu

[A74] J. Albrycht, *Przemówienie wygłoszone z okazji nadania członkowstwa honorowego W. Orliczowi*, Wiadom. Mat. **18**(1974), 200–204.

[Al90] A. Alexiewicz *Władysław Orlicz*, Biuletyn Informacyjny, Towarzystwo Miłośników Lwowa Oddział w Poznaniu **4**(1990), 5–6. **18**(1974), 200–204.

[ABK97] A. Alexiewicz, F. Barański i J. Koroński, *Koło matematyczno-fizyczne studentów Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Opolskiego. Matematyka 30 (1997), 9–42.

[Ar] Archiwum UAM, sygn. 509/984, 103e/54, 638/391.

[B83] G. Banaszkiewicz, *Ostatni*, Wprost nr 45/49, 6 listopada 1983, 3–5.

[B86] G. Banaszkiewicz, *Władysław Orlicz: przestrzenie*, Życie Literackie **7**(1769), 1986, str. 7.

[Bo83] *Władysław Orlicz*, w: A. N. Bogoliubov, *Matematycy i mechanicy – biograczeskij sprawocznik*, Naukowa Dumka, Kijów 1983, 358 (po rosyjsku).

[Dr07] J. Draus, *Uniwersytet Jana Kazimierza we Lwowie 1918–1946. Portret kresowej uczelni*, Księgarnia Akademicka, Kraków 2007.

[Du07] R. Duda, *Lwowska Szkoła Matematyczna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2007, 256 str.

[Dz72] *Dzieje Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza 1919-1969*, red. Z. Grot, Poznań 1972, str. 211.

[JM07] E. Jakimowicz i A. Miranowicz, *Stefan Banach. Niezwykłe życie i genialna matematyka*, Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego i Wyd. Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Gdańsk-Poznań 2007.

[J80] W. Jankowski, *O działalności naukowej Profesora W. Orlicza*, Wiadom. Mat. **22**(1980), 275–279.

[Ka92] R. Kałuża, *Stefan Banach*, Wydawnictwo GZ, Warszawa 1992, 167 str.; ang. tłum. R. Kałuża, *The life of Stefan Banach, Through a reporter's eyes*, Birkhäuser, Boston 1996, 147 str.

[K81] K. Kuratowski, *Notatki do Autobiografii*, Czytelnik, Warszawa 1981.

[K03] *Konferencja w 100. rocznicę urodzin Prof. Władysława Orlicza (1903-1990)*, Życie Uniwersyteckie UAM **6**(2003), 7.

[KB37] Z. Krygowski i M. Biernacki *Referat o działalności naukowej p. Doc. Dr. Władysława Orlicza*, w związku z nominacją na profesora Uniwersytetu Poznańskiego, Poznań 1937, 6 stron.

[Kt84] *Kto jest kim w Polsce 1984*, Edycja 1, Interpress, Warszawa 1984, str 697.

[L77] T. Lubart, *Wszystko dla matematyki*, Gazeta Zachodnia nr 218, 26 września 1977, str. 3.

[M92] L. Maligranda, *Władysław Orlicz: 24 May - 9 August 1990*, w: *On Orlicz results in interpolation theory*, Research Reports, Department of Mathematics, Luleå University of Technology 7(1992), 13–15.

[M01i] L. Maligranda, *Wladyslaw Orlicz*, 2001, 5 stron, electroniczna publikacja w: *The MacTutor History of Mathematics archive-Biographies*:
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Orlicz.html`

[M01] L. Maligranda, *Prof. Wladyslaw Orlicz (1903-1990)*, Brzeski Magazyn Informacyjny **11**(2001), 14–15.

[M02] L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, Istoriko-Mat. Issl. **7**(2002), 317–325, 369 (po rosyjsku).

[M03i] L. Maligranda, *Wladyslaw Orlicz*, 2003, 5 stron, electroniczna publikacja w: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (Outstanding Polish Mathematicians)
`http://www.impan.gov.pl/Great/Orlicz/`

[M03] L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903–1990) – matemático polaco*, Boletín Asoc. Mat. Venezolana **10**(2003), 79–88 (po hiszpańsku); Również: `http://boletinamv.ma.usb.ve/vol10.html`
`http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/lmaligranda.pdf`

[M04] L. Maligranda, *Przestrzenie Profesora*, Głos Wielkopolski, Dodatek Głos Poznaniaka, w: *Księga Poznaniaków* 20(18201), 24/25 Jan. 2004, v.
Rowniez na stronie: `http://www.glos.com/ksiegap/index.php?tekst=20040126-1130`

[M06] L. Maligranda, *Antoni Łomnicki (1881–1941) – matematyk lwowski*, w: In: *Wokół Bernoullich*, XIX Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki, Zamość 6-10 czerwca 2005, pod redakcją Witolda Więsława, Politechnika Lubelska, Lublin 2006, 179-213.

[M07] L. Maligranda, *Wladyslaw Orlicz (1903-1990) – Polish mathematician*, Math. Translations **26**(2007), No. 2, 126–132 (po chińsku); Tłumaczenie pracy [Ma08] z angielskiego na chiński przez Wang Yuwena i Shjshi Shujuna (obaj z Harbinu).

[Ma07] L. Maligranda, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, Antiquitates Math. **1**(2007), 15–61.

[M08] L. Maligranda, *Antoni Łomnicki (1881-1941)*, Wiadom. Mat. **44**(2008), w druku (51 stron).

[Ma08] L. Maligranda, *Władysław Orlicz (1903-1990) – Polish mathematician*, w: Banach Center Publ. **82**(2008) (Proc of the Conf. *Lvov Mathematical School in the Period 1915-45 as Seen Today*, Aug. 8-15, 2005, Będlewo, Poland), Warszawa 2008, w druku (16 stron).

[MaL] L. Maligranda, *Lwów School of Mathematics and its four members: Antoni Łomnicki, Eustachy Żyliński, Stefan Kaczmarz and Władysław Orlicz*, w przygotowaniu.

[MaZ] L. Maligranda, *Eustachy Żyliński (1889-1954)*, w przygotowaniu (23 strony w marcu 2008).

[MP91] L. Maligranda and L. E. Persson, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, Notices Amer. Math. Soc. **38**(1991), 21.

[MW92] L. Maligranda and W. Wnuk, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, Nauka Polska **3**(1992), 187–193.

[MW00] L. Maligranda and W. Wnuk, *Władysław Orlicz — his life and contributions to mathematics*, w: *Function Spaces* (Proc. Conf. on Function Spaces held in Poznań in 1998), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York 2000, 23–29.

[MW04] L. Maligranda and W. Wnuk, *Wladyslaw Orlicz (1903-1990). A biography*, In: Banach Center Publ. **64**(2004), 13–19.

[MW05] L. Maligranda and W. Wnuk, *Wladyslaw Orlicz (1903-1990)*, 2005, 6 stron, electroniczna publikacja w: Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu (w badania naukowe i wykłady im. Władysława Orlicza):
`http://web.wmi.amu.edu.pl/Default.aspx?tabid=142 -147`
`http://old.wmid.amu.edu.pl/en/wyklady/orlicz/orlicz.html`

[Ma00] A. Marciniak, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, w: Członkowie PAN w Wielkopolsce, Wydawnictwo Oddziału PAN w Poznaniu, Poznań 2000, 135–141.

[Ma02] A. Marciniak, *Tradycje Lwowskiej Szkoły Matematycznej w badaniach Profesora Władysława Orlicza (1903-1990)*, w: Biuletyn Archiwum PAN, nr 43, Warszawa 2002, 140–151.

[Ma68] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz*, Nauka Polska **16**(1968), nr 5, 94–97.

[Ma75] W. Matuszewska, *Odznaczeni. Wybitny matematyk Prof. Dr Władysław Orlicz*, Kronika Miasta Poznania, **43**(1975), nr 3, 112–118.

[Ma78] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz - A review of his scientific work*, Commentationes Math. Tomus Specialis in Honorem Ladislai Orlicz, Vol I, 1978, 1–17.

[Ma68] W. Matuszewska, *Władysław Orlicz*, w: *Władysław Orlicz, Collected Papers*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988, xi-xiv.

[Mi89] B. Miśkiewicz, *Uniwersytet im. Adama Mickiewicza 1919-1989*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1989, str. 119, 120, 200, 305.

[Mu90] J. Musielak, *Z Żałobnej Karty, Prof. dr hab. Władysław Orlicz (1903-1990)*, Informator UAM, Poznań, 30 września 1990, 1–3.

[Mu01] J. Musielak, *Władysław Orlicz (1903–1990)*, w: *Wielkopolanie XX wieku*, Poznań 2001, 331–338.

[MW96] J. Musielak i W. Wnuk, *Andrzej Alexiewicz (1917–1995)*, Wiadom. Mat. 32(1996), 153–165; ang. tłumaczenie przez M. Nowaka w: *Fuction Spaces VIII*, Banach Centar Publ. 79(2008), 11–20.

[N75] *Nauka Polska i jej Osiągnięcia*, red. J. Szyłłejko, Warszawa 1975, 37–40.

[No88] M. Nowak, *Człowiek, którego imię nosi przestrzeń (85-lecie profesora Władysława Orlicza)*, Gazeta Poznańska nr 121, 25 maja 1988, str. 1 i 2.

[No03] M. Nowak, *Swobodnym lotem wolnej myśli. Stulecie urodzin Prof. Władysława Orlicza*, Gazeta Poznańska nr 173, 26-27 lipca 2003, str. 12.

[Or73] W. Orlicz, *Idee przewodnie nauki - wypowiedź*, Nurt 1973, nr 11, 7–8.

[OW87] *Orlicz Władysław Orlicz*, w: *Znakomici matematycy*, Radianska Szkoła, Kijów 1987, 392 (po rosyjsku).

[Or93] *Orlicz Władysław Roman*, w: Biogramy Uczonych Polskich, Suplement (opr. A. Śródka, Polska Akademia Nauk, Ośrodek Informacji Naukowej, Warszawa 1993, 131–133.

[Or01] *Władysław Orlicz*, w: W. Krysicki, *Poczet wielkich matematyków*, Wydawnictwo KLEKS, Bielsko-Biała 2001, 289–291.

[PB03] Z. Pawlikowska-Brożek, *Orlicz Władysław (1903-1990)*, w: Słownik Biograficzny Matematyków Polskich, Red. S. Domaradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, Tarnobrzeg 2003, 174–175.

[PW93] *Politechnika Lwowska 1844-1945*, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993, 577 str. [Orlicz str. 310-311, 433, 506-507].

[PO73] *Profesor Władysław Orlicz*, Nurt 1973, nr 6, str. 14.

[S90] K.-H. Schlote, *Orlicz Władysław*, w: S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, K.-H. Schlote, *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, Leipzig 1990, 354.

[Se74] Z. Semadeni, *O pracach W. Orlicza z analizy funkcjonalnej*, Wiadom. Mat. **18**(1974), 191–199.

[St92] H. Steinhaus, *Wspomnienia i zapiski*, Aneks, London 1992.

[S98] A. Śródka, *Uczeni Polscy XIX-XX Stulecia*, Tom III: M-P, Warszawa 1998, 310–313.

[S94] K. Szałajko, *Wspomnienia lwowskie*, Wiadom. Mat. **30**(1994), 251–263.

[WO87] *Władysław Orlicz*, w: A. I. Borodin and A. S. Bugai, *Eminent Mathematicians*, Kiev 1987, 392 (po rosyjsku).

[WO90] *Władysław Orlicz: 24 May - 9 August 1990*, Studia Math. **97**(1990), No. 2, ii-iv.

[WO02] *Władysław Orlicz – Twórca Poznańskiej Szkoły Matematycznej* pod redakcją Jerzego Kąkola i Zbigniewa Palki, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2002, 1–136.

[Wn03] W. Wnuk, *The Władysław Orlicz Centenary Conference and Function Spaces VII*, Życie Uniwersyteckie UAM **9**(2003), 5–6.

[Z83] *Zarys Dziejów Nauk Przyrodniczych w Polsce*, Warszawa 1983, str. 204, 211.

[Z90] W. Żelazko, *Władysław Orlicz (1903-1990)*, Rocznik Tow. Nauk. Warszawskiego **53**(1990), 76–77.

8. Cytowane książki bądź prace

[A49-51] A. Alexiewicz, *On sequences of operations, I-IV*, Studia Math. 11(1949), 1–30; 11(1950), 200–236; 12(1951), 84–92, 93–101.

[A69] A. Alexiewicz, *Analiza Funkcjonalna*, Monografie Matematyczne Tom 49, PWN, Warszawa 1969, 535 str. [Orlicz str. 93-95, 101, 211, 260-261, 269, 284, 521].

[AS85] P. Antosik i C. Swartz, *Matrix Methods in Analysis*, Lecture Notes in Math. 1113, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985, iv+114 str.

[AZ90] J. Appell i P. P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Tracts in Math. 95, Cambridge University Press, Cambridge 1990, 319 str.

[Ba31] S. Banach, *Teoria Operacyj, Tom I. Operacje Liniowe*, Wyd. Kasy im. Mianowskiego, Warszawa 1931, viii+236 str. [Orlicz str. 144, 226].

[Ba32] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne I, Warszawa 1932; Przedruk w: Stefan Banach Oeuvres, Vol. II, PWN, Warszawa 1979, 13-219.

[BS88] C. Bennett i R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics 129, Academic Press, Boston 1988, 483 str.

[BGT89] N. H. Bingham, C. M. Goldie i J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge - New York 1989, xx+494 str.

[BS71] J. Bochnak i J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. 39(1971), 59–76 i 77–112.

[BL89] J. Boos i T. Leiger, *General theorems of Mazur-Orlicz type*, Studia Math. 92(1989), 1-19.

[Br45] A. Brudno, *Summation of bounded sequences by matrices*, Mat. Sbornik N.S. 16(1945), 191-247 (po rosyjsku).

[BKS] Yu. A. Brudnyi, S. G. Krein i E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Itogi Nauki i Techniki, T. Mat. Analiz, Moskwa 1986, 3–163; angielskie tłumaczenie w Journal of Soviet Math. 42(1988), 2009–2113.

[BK91] Yu. A. Brudnyi i N. Ya. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces. I*, North Holland, Amsterdam 1991, xv+718 str.

[Bu78] I. M. Bund, *Birnbaum-Orlicz Spaces*, Notes Inst. of Math. and Stat., Univ. of Sao Paulo, Math. Series 4, Sao Paulo 1978, vii+161 str.

[Bu28] J. C. Burkill, *The strong and weak convergence of functions of general type*, Proc. London Math. Soc. (2) 28(1928), 493–500; Corrigenda 33(1932), 561.

[Ca02] S. H. Case, *The Scottish Café*, Slapering Hol Press, New York 2002, 40 str.

[CT07] R. E. Castillo and E. Trousselot, *A generalization of the Maligranda-Orlicz lemma*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 8(2007), no. 4, Article 115, 3 str.

[Ch96] S. Chen, *Geometry of Orlicz Spaces*, Dissertationes Math. 356(1996), 204 str.

[C50] R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, Macmillan, London, 1950, xiii+347 str. (rosyjskie tłumaczenie: Nieskończone macierze i przestrzenie ciągów, Moskwa 1960).

[Co78] J. B. Cooper, *Saks Spaces and Applications to Functional Analysis*, Notas de Matemática 64, North Holland, Amsterdam 1978, x+325 str.

[CPT] E. Corbacho, A. Plichko and V. Tarieladze, *A one-sided version of Alexiewicz-Orlicz's differentiability theorem*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. 99(2005), No. 2, 167–181.

[CHKM] Y. Cui, H. Hudzik, R. Kumar i L. Maligranda, *Composition operators in Orlicz spaces*, J. Austral. Math. Soc. 76 (2004), no. 2, 189–206.

[Da72] N. A. Davydov, *The sharpness of the Mazur-Orlicz theorem*, Mat. Zametki 11(1972), 431-436; angielskie tłumaczenie w Math. Notes 11(1972), 263-265.

[DM77] F. S. De Blasi i J. Myjak, *Generic properties of hyperbolic partial differential equations*, J. London Math. Soc. 15(1977), 113–118.

[DM83] F. S. De Blasi i J. Myjak, *Orlicz type category results for differential equations in Banach spaces*, Comment. Math. Prace Mat. 23(1983), 193–197.

[D84] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Math., vol 92, Springer-Verlag, New York 1984, xi+261 str.

[DU77] J. Diestel i J. J. Uhl, *Vector Measures*, Mathematical Surveys No 15, AMS, Providence, Rhode Island, 1977, xii+322 str.

[Di81] S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, Notas de Matemática 83, North-Holland 1981, xii+492 str.

[D96] L. Drewnowski, *Ciągi operatorów*, Serta Mathematica Andreae Alexiewicz, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996, 57–81.

[D00] L. Drewnowski, *Recent developments of some ideas and results of Orlicz on unconditional converegnce*, w: *Function Spaces* (Proc. Conf. on Function Spaces held in Poznań 1998), Lecture Notes in Pure and Applied Math. 213, Marcel Dekker, New York 2000, 31–45.

[DN99] R. M. Dudley i R. Norvaisa, *Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and p-variation*, Lecture Notes in Math. 1703, Springer-Verlag, Berlin 1999, viii+277 str.

[DS58] N. Dunford i J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publishers Inc, New York 1958, 872 str.

[FL91] W. Filter i I. Labuda, *Essays on the Orlicz-Pettis theorem*, Real Analysis Exchange 16(1991), 393–403.

[FL81] B. Fuchssteiner i W. Lusky, *Convex Cones*, Notas de Matemática 82, North Holland, Amsterdam-New York 1981, x+429 str.

[Hi48] E. Hille, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, New York 1948, xii+528.

[HP57] E. Hille i R. S. Philips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Providence 1957, xii+808 str.

[H83] H. Hudzik, *Uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg's norm*, Comment. Math. Prace Mat. **23**(1983), no. 1, 21–32.

[H85] H. Hudzik, *Uniformly non-$l_n^{(1)}$ Orlicz spaces with Luxemburg norm*, Studia Math. 81(1985), no. 3, 271–284.

[HKM] H. Hudzik, A. Kamińska i M. Mastyło, *O niektórych rezultatach dotyczących przestrzeni Orlicza i Musielaka-Orlicza*, Materiały Sesji Naukowej z okazji 50-lecia pracy Prof. Juliana Musielaka na Uniwersytecie w Poznaniu, UAM, Poznań 1999, 49–69.

[HM94] H. Hudzik and L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Math. 48(1994), no. 1, 100–111.

[HM00] H. Hudzik and L. Maligranda, *Amemiya norm equals Orlicz norm in general*, Indag. Math. (N.S.) 11(2000), no. 4, 573–585.

[Ja95] D. Jach, *Wybrane zagadnienia z teorii przestrzeni Saksa*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia T. (CCLXII), 188, Szczecin 1995.

[JL71] A. Jakimovski i A. Livne, *An extension of Brudno-Mazur-Orlicz theorem*, Studia Math. 41(1971), 257-262.

[JMST] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman i L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces*, Memoires Amer. Math. Soc. No. 217, Providence 1979, v+298 str.

[Jo81] M. Josephy, *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 83(1981), 354–356.

[KN28] S. Kaczmarz i L. Nikliborc, *Sur les suites de fonctions convergentes en moyenne*, Fund. Math. 11(1928), 151–168.

[KS58] S. Kaczmarz i H. Steinhaus, *Teorija Ortogonal'nykh Rjadov*, Moskwa 1958 (tłumaczenie R. S. Gutjera i P. L. Ul'janova), 507 str.

[KK97] M. I. Kadets i V. M. Kadets, *Series in Banach Spaces. Conditional and Unconditional Convergence*, Birkhäuser Verlag, Basel 1997, 164 str.

[K80] N. J. Kalton, *The Orlicz-Pettis theorem*, Contemporary Math. 2(1980), 91–100.

[KPR] N. J. Kalton, N. T. Peck and J. W. Roberts, *An F-space sampler*, London Mathematical Society Lecture Note Series 89, Cambridge University Press, Cambridge 1984, xii+240 str.

[Ka81] A. Kamińska, *Rotundity of Orlicz-Musielak sequence spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 29(1981), no. 3-4, 137–144.

[Ka82] A. Kamińska, *On uniform convexity of Orlicz spaces*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 44(1982), no. 1, 27–36.

[Ka83] A. Kamińska, *Strict convexity of sequence Orlicz-Musielak spaces with Orlicz norm*, J. Funct. Anal. 50(1983), no. 3, 285–305.

[KM01] A. Yu. Karlovich and L. Maligranda, *On the interpolation constant for Orlicz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 129(2001), no. 9, 2727–2739.

[KS84] B. S. Kashin i A. A. Saakjan, *Ortogonal'nyje Rjady*, Nauka, Moskwa 1984, 496 str.; angielskie tłumaczenie *Orthogonal Series*, Transl. of Mathematical Monographs 75, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1989, 463 str.

[Ki84] S. V. Kisliakov, *A remark on the space of functions of bounded p-variation*, Math. Nachr. 119(1984), 137–140.

[KK91] V. Kokilashvili i M. Krbec, *Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces*, Word Scientific, Singapore 1991, xii+233 str.

[KN86] H. König i M. Neumann, *Mathematical Economics with an Introduction to Convex Analysis*, Mathematical Systems in Economics 100, Hain Verlag bei Athenäum, Königstein 1986, x+239 str. (po niemiecku).

[Ko94] G. Köthe, *Wkład Stanisława Mazura w analizę funkcjonalną*, Wiadom. Mat. **30**(1994), 199-250 (jest to polskie tłumaczenie artykułu *Stanislaw Mazur's Contributions to Functional Analysis*, Math. Ann. 277(1987), 489–528).

[KR51] M. A. Krasnoselskiĭ i Ya. B. Rutickiĭ, *On the theory of Orlicz spaces*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 81(1951), 497–500 (po rosyjsku).

[KR58] M. A. Krasnoselskiĭ i Ya. B. Rutickiĭ, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, GITL, Moskwa 1958; ang. tłumaczenie Nordhoff, Groningen 1961, 260 str.

[KPS] S. G. Krein, Yu. I. Petunin i E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Nauka, Moskwa 1978; angielskie tłumaczenie Amer. Math. Soc., Providence 1982, xii+375 str.

[KJF] A. Kufner, O. John i S. Fucik, *Function Spaces*, Noordhoff Internat. Publ., Leyden; Academia, Prague, 1977, xv+454 str.

[KMP07] A. Kufner, L. Maligranda and L.-E. Persson, *The Hardy inequality. About its history and some related results*, Vydavatelský Servis, Plzeň 2007, 162 str.

[LY73] A. Lasota i J. Yorke, *The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space*, J. Differential Equations 13(1973), 1–12.

[Le70] P. Lelong, *Theoreme de Banach-Steinhaus pour les polynomes; applications entieres d'espaces vectoriels complexes*, Seminaire d'Analyse P. Lelong 1970, expose no. 9, Lecture Notes in Math. 205, Springer-Verlag, Berlin 1970, 87–112.

[Le71] P. Lelong, *Sur les fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectorials topologiques et une extension du theoreme de Banach-Steinhaus aux families d'applications polynomiales*, Troisiéme Colloque sur l'Analyse Fonctionelle (Liége 1970), Vander, Louvain 1971, 21–45.

[Le75] R. Leśniewicz, *On modular spaces I, II*, Comment. Math. Prace Mat. 18 (1975), 23-242, 243-271.

[LT77, 79] J. Lindenstrauss i L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces, I. Sequence Spaces i II. Function Spaces*, Springer-Verlag 1977, xiii+188 str. i 1979, 253 str.

[Lu55] W.A.J. Luxemburg, *Banach function spaces*, Ph. D. Thesis, Delft 1955, 1–70.

[M80] I. J. Maddox, *Infinite Matrices of Operators*, Lecture Notes in Math. 786, Springer, Berlin 1980, v+122 str.

[Ma84] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. 234(1984), 1–49.

[Mal89] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminars in Math. 5, Univ. of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989, iii+206 str.

[Ma89] L. Maligranda, *Some remarks on Orlicz's interpolation theorem*, Studia Math. 95(1989), 43–58.

[Ma91] L. Maligranda, *On Orlicz results in interpolation theory*, Proc. Orlicz Mem. Conf., Oxford/MS (USA) 1991, Exp. No. 5, 1–12.

[Ma09] L. Maligranda, *Orlicz spaces — history and a survey of certain aspects*, Math. Japonica, w przygotowaniu.

[MM00] L. Maligranda and M. Mastyło, *Inclusion mappings between Orlicz sequence spaces*, J. Funct. Anal. 176 (2000), no. 2, 264–279.

[MW] L. Maligranda and W. Wnuk, *Landau type theorem for Orlicz spaces*, Math. Z. 208(1991), no. 1, 57–63.

[Mr34] J. Marcinkiewicz, *On a class of functions and their Fourier series*, C. R. Soc. Sci. Varsovie 26(1934), 71–77; przedruk w: J. Marcinkiewicz, Collected Papers, PWN, Warszawa 1964, 36–41.

[Ma96] M. Mastyło, *Zastosowanie przestrzeni dwunormowych w teorii sumowalności*, Serta Mathematica Andreae Alexiewicz, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996, 103-117.

[Ma81] R.D. Mauldin, *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1981, xiii+268 str.

[MM50] M. Morse i W. Transue, *Functionals F bilinear over the product $A \times B$ of two pseudo-normed vector spaces*, Annals of Math. 51(1950), 576–614.

[MST99] G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos and A. Tonge, *Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps*, Studia Math. 134 (1999), no. 1, 1–33.

[Mu76] J. Musielak, *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976, 315 str.

[Mu78] J. Musielak, *Przestrzenie Modularne*, Wydawnictwo Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1978, 136 str.

[Mu83] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Lecture Notes in Math. 1034, Springer-Verlag, Berlin-New York 1983, iii+222 str.

[My78] J. Myjak, *Twierdzenie o kategoriach w teorii równań różniczkowych i różniczkowo-funkcyjnych*, Zeszyty Naukowe AGH, Matematyka-Fizyka-Chemia 38(1978), 7–61.

[My80] J. Myjak, *Orlicz type category theorems for functional and differential equations*, Dissertationes Math. 206(1980), 81 str.

[Na50] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo 1950, 289 str.

[Na51] H. Nakano, *Topology and Linear Topological Spaces*, Tokyo Math. Book Series, Vol. 3, Maruzen Co., Tokyo 1951, viii+281 str.

[Nas71] M. Z. Nashed, *Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis*, w: Nonlinear Functional Anal. and Appl. (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1970), Academic Press, New York 1971, 103–309.

[Ne91] M. M. Neumann, *Generalized convexity and the Mazur-Orlicz theorem*, Proc. Orlicz Mem. Conf., Oxford/MS (USA) 1991, Exp. No.8, 1–15.

[On68] R. O'Neil, *Integral transforms and tensor products on Orlicz spaces and $L(p,q)$ spaces*, J. Anal. Math. 21(1968), 1–276.

[OP08] M. I. Ostrovskii and A. M. Plichko, *On the Ukrainian translation of "Théorie des opérations linéaires" and Mazur's updates of the "Remarks" section*, manuscript, March 2008, 1–19.

[Ov84] V. I. Ovchinnikov, *The Method of Orbits in Interpolation Theory*, Math. Reports Vol. 1, Part 2, Harwood Publishers 1984, 349-516 = 168 str.

[PG96] J. Pečarić i I. Gusić, *On some inequalities of Maligranda and Orlicz*, Comment. Math. Prace Mat. 36(1996), 169–178.

[P67] A. L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, , Harper and Row Publishers, New York-Evanston-London 1967, x+228 str.

[Pe66] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformations*, McGraw-Hill Pub, London-New York-Toronto 1966, viii+142 str.

[PSV] L. C. Piccinini, G. Stampacchia i G. Vidossich, *Ordinary Differential Equations in $\mathbb{R}^n$*. Problems and Methods, Applied Math. Sciences 39, Springer-Verlag, New York-Berlin 1984, xii+385 str.

[Pi07] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, , Birkhäuser, Boston 2007, xxiv+855 str.

[PW89] F. Prus-Wiśniowski, *On superposition of functions of bounded φ-variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 107(1989), 361-366.

[PR68] D. Przeworska-Rolewicz i S. Rolewicz, *Equations in Linear Spaces*, Monografie Matematyczne Tom 47, PWN, Warszawa 1968, 380 str.

[RR91] M. M. Rao i Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York 1991, 461 str.

[RR02] M. M. Rao i Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York 2002, xi+464 str.

[Rj68] B. V. Rjazanov, *Functions of class V_γ*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh. 23(1968), No. 6, 36–39 (po rosyjsku).

[R84] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, PWN Warszawa 1984, 470 str.; Second enlarged edition, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw 1984, xii+459 pp.

[RS82] A. C. M. van Rooij i W. H. Schikhof, *A Second Course on Real Functions*, Cambridge University Press, Cambridge - New York 1982, xiii+200 str.

[Ru79] W. H. Ruckle, *The bounded consistency theorem*, Amer. Math. Monthly 86(1979), 566-571.

[Sc85] M. Schramm, *Functions of φ-bounded variation and Riemann-Stieltjes integration*, Trans. Amer. Math. Soc. 287(1985), 49–63.

[Se80] Z. Semadeni, *Some Saks-space dualities in harmonic analysis on commutative semigroups*, Functional Analysis, Numerical Analysis and Optimization, Special Topics of Applied Mathematics (Proc. Sem., Ges. Math. Datenverarb., Bonn 1979), North Holland, Amsterdam-New York 1980, 71–87.

[Se92] Z. Semadeni, *Krótkie informacje*, Wiadom. Mat. 29(1992), z. 2, 289–290.

[Si59] R. Sikorski, *Funkcje Rzeczywiste*, Tom II, Monografie Matematyczne 37, PWN, Warszawa 1959, 262 str.

[Sim02] D. Simpson, *Jerzy Łoś and a history of Abelian groups in Poland*, Rocky Mountain J. Math. 32(2002), no. 4, 1245–1255.

[SW80] A. K. Snyder i A. Wilansky, *The Mazur-Orlicz bounded consistency theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 80(1980), 374-375.

[Sr67] I. V. Šragin, *The Amemiya norm in an Orlicz-Nakano space*, Kišinev. Gos. Univ. Učen. Zap. 91(1967), 91–102 (po rosyjsku).

[Sw90] C. Swartz, *The evolution of the uniform boundedness principle*, Math. Chronicle 19(1990), 1–18.

[Sw96] C. Swartz, *Infinite Matrices and the Gliding Hump*, World Scientific, Singapore 1996, xii+209 str.

[To76] A. Torchinsky, *Interpolation of operators and Orlicz classes*, Studia Math. 59(1976), 177–207.

[Tu80] B. Turett, *Fenchel-Orlicz spaces*, Dissertationes Math. 181(1980), 1–55.

[Tu76] Ph. Turpin, *Convexités dans les espaces vectorials topologiquex generaux*, Dissertationes Math. 131(1976), 1–221.

[U78] P. L. Uljanov, *Weyl multipliers for orthogonal series*, Comment. Math. Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday 1(1978), 355–369 (po rosyjsku).

[Wi84] A. Wilansky, *Summability through Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam - New York 1984, xii+318 str.

[Wn84] W. Wnuk, *Representations of Orlicz lattices*, Dissertationes Math. 235(1984), 62 str.

[W91] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambrigde Univ. Press, Cambridge 1991, xii+382 str.

[Wo97] W. A. Woyczyński, *Szukając Birnbauma*, Wiadom. Mat. 33(1997), 137–154; angielskie tłumaczenie: *Seeking Birnbaum, or nine lives of a mathematician*, Math. Intelligencer 23(2)(2001), 36–46.

[WW83] C. Wu i T. Wang, *Orlicz Spaces and their Applications*, Heilongjing Sci. & Tech. Press 1983, 461 str. (po chińsku).

[WWC] C. Wu, T. Wang i S. Chen, *Advances of research on Orlicz spaces in Harbin*, w: Functional Analysis in China, Math. Appl. 356, Kluver Acad. Publ., Dordrecht 1996, 187–204.

[WWCW] C. Wu, T. Wang, S. Chen i Y. Wang, *Theory of Geometry of Orlicz Spaces*, Harbin Inst. of Tech. Press 1986 (po chińsku).

[Ya74] S. Yamamuro, *Differential calculus in topological linear spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 374, Springer-Verlag, Berlin-New York 1974, iv+179 pp.

[Yo37] L. C. Young, *Sur une generalisation de la notion de variation de puissance p-ieme bornee au sens de M. Wiener, et sur la convergence des series de Fourier*, C. R. Acad. Sci., Paris 204(1937), 470-472.

[Yo38] L. C. Young, *General inequalities of Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series*, Math. Ann. 115(1938), 581-612.

[Yo76] L. C. Young, *A converse to some inequalities and approximations in the theory of Stieltjes and stochastic integrals, and for nth derivatives*, Studia Math. 55(1976), 215-223.

[Za52] A. C. Zaanen, *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, Compositio Math. 10(1952), 56–94.

[Za53] A. C. Zaanen, *Linear Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1953, vii+601 str.

[Za72] A. C. Zaanen, *Riesz Spaces I, II*, North-Holland, 1972, 514 str. i 1983, 720 str.

[Ze58] K. Zeller, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin- Göttingen - Heidelberg 1958, viii+242 str.

[ZB70] K. Zeller, i W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer-Verlag, Berlin-New York 1970, xii+314 str.

[Zy35] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Monografie Matematyczne V, Warszawa-Lwów 1935; przedruki New York 1940, 1952, vi+329 str. i 1955; Wydanie drugie: Trigonometric Series, Cambridge 1959.

Lech Maligranda
Department of Mathematics
Luleå University of Technology
SE-971 87 Luleå, Szwecja
e-mail: `lech@sm.luth.se`
Website: `http://www.sm.luth.se/~lech/`