

Lech Maligranda (Luleå)

STEFAN KACZMARZ (1895 -1939)

1. Życie, praca i rodzina Stefana Kaczmarza

Stefan Marian Kaczmarz urodził się 20 marca 1895 roku w miejscowości Sambor (woj. lwowskie). Ochrzczony został 16 kwietnia 1895 roku. W dokumentach odnośnie religii czy wyznania czasami pisał, że jest wyznania grecko-katolickiego, a innym razem rzymsko-katolickiego.



1. Zdjęcie Kaczmarza z jego własnoręcznym podpisem

Rodzicami jego byli Mikołaj Kaczmarz i Emilia ze Smyczyńskich. Ojciec był urzędnikiem sądowym. Matka zmarła 16 czerwca 1919 roku. Miał jedną siostrę Helenę i dwóch braci: Romana i Eustachego. Siostra Helena Kaczmarz, po mężu Potempa, zmarła w 1963 roku. Brat Roman Kaczmarz był studentem prawa UJ. Był on w Legionach Polskich i w obozie, gdzie nabawił się gruźlicy jelit, wskutek czego zmarł po I wojnie światowej. Drugi brat Eustachy Kaczmarz był doktorem prawa i przed II wojną światową mieszkał w Tarnowskich Górach, a po II wojnie w Opolu. Był pracownikiem wydziału finansowego Wojewódzkiej Rady Narodowej w Opolu.

Dzieciństwo Stefan Kaczmarz spędził w Kętach pow. Biała. Młodość natomiast w Tarnowie, gdzie Kaczmarzowie mieszkali na ul. Lwowskiej 263 i ul. Ks. Skargi 621. W latach 1901-1905 uczęszczał do Szkoły Powszechnej w Kętach (klasy I-IV), a w latach 1905-1907 do Państwowego Gimnazjum w Wadowicach (klasy I-II). Następnie w latach 1907-1913 uczęszczał do II Gimnazjum Państwowego w Tarnowie (klasy III-VIII), które ukończył maturą z odznaczeniem w dniu 17 czerwca 1913 roku.



2. Świadectwo dojrzałości Kaczmarskiego (1913)

We wrześniu 1913 roku Kaczmarski wstąpił na Uniwersytet Jagielloński w Krakowie na Wydział Filozoficzny, gdzie studiował kierunek matematykę, fizykę i chemię. Uczyli go wtedy: Kazimierz Żorawski (1866-1953), Stanisław Zaremba (1863-1942), Antoni Hobbieski (1879-1940), Jan Sleszyński (1854-1931), Marian Smoluchowski (1872-1917).

13 sierpnia 1914 roku wybuchła I wojna światowa i 1 września 1914 roku Kaczmarski wstąpił do Legionów Polskich (Legion Wschodni, Baon I, komp. I). 12 września 1914 roku Kaczmarskiego przydzielono do 16 kompanii 2go pp. L.P. Wyjechał z nią na front, biorąc udział w kampanii karpackiej od marca 1915 r. do marca 1917 r. (stacja zborna w Wiedniu i Kamieńsku). 17 lipca 1915 r. został mianowany plutonowym.

1 września 1917 roku został on przeniesiony do artylerii i w listopadzie wyjechał wraz z II baterią 1-pułku artylerii Polskiego Korpusu Posiłkowego na front. Aresztowano go w Sadagórze. W styczniu 1918 roku został przydzielony do Szkoły Podchorążych Artylerii P.K.P. w Waławie pow. Przemyśl. Po rozwiązaniu Legionów Polskich na skutek odmowy złożenia przysięgi, był internowany przez władze austriackie w Huszt i Bustyahaza (Węgry). Zbiegł stamtąd do Małopolski, gdzie trafił do obozu internowanych legionistów w Witkowicach pod Krakowem.



3. Stefan Kaczmarz w Legionach Polskich. Siedzą od lewej do prawej: Stefan Kaczmarz, Roman Witek, Ludwik Lubas, Maryan Sitko. Stoją od lewej do prawej: Stanisław Śliski, Rudolf Dworzak, Władysław Zborowski

27 marca 1918 roku Kaczmarz został zwolniony z wojska. W tym samym roku podjął ponownie studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie na Wydziale Filozoficznym, kierunku matematyka, fizyka i chemia, które ukończył w 1922 roku. Uczyli go między innymi: Kazimierz Żorawski (1866-1953), Stanisław Zaremba (1863-1942), Antoni Hoborski (1879-1940), Jan Sleszyński (1854-1931), Alfred Rosenblatt (1880-1947, Lima), Tadeusz Banachiewicz (1882-1954), Franciszek Leja (1885-1979), Witold Wilkosz (1891-1941) i Włodzimierz Stożek (1883-1941).

W okresie 15 listopada 1918-15 lutego 1919 Kaczmarz służył w Batalionie Akademickim w Krakowie jako szeregowy. 16 lutego 1919 roku został zwolniony z wojska w stopniu plutonowego, by 10 lipca 1920 roku wstąpić jako ochotnik do Wojska Polskiego (miał wtedy ukończone 7 semestrów na UJ). Z obozu akademików-ochotników w Rembertowie został przydzielony do Poznania. W okresie 25 VII 1920 - 5 XI 1920 odbywał skrócony kurs w Szkole Podchorążych Artylerii w Poznaniu, który ukończył z wynikiem dobrym.



4. Kaczmarz wśród legionistów w obozie internowanych (Kaczmarz siedzi na krześle)

Ostatecznie 15 listopada 1920 roku został przeniesiony do rezerwy w stopniu podchorążego rezerwy. By móc uczyć w szkołach, 4 października 1922 roku ukończył Studium Pedagogiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie i otrzymał absolutorium tegoż uniwersytetu.



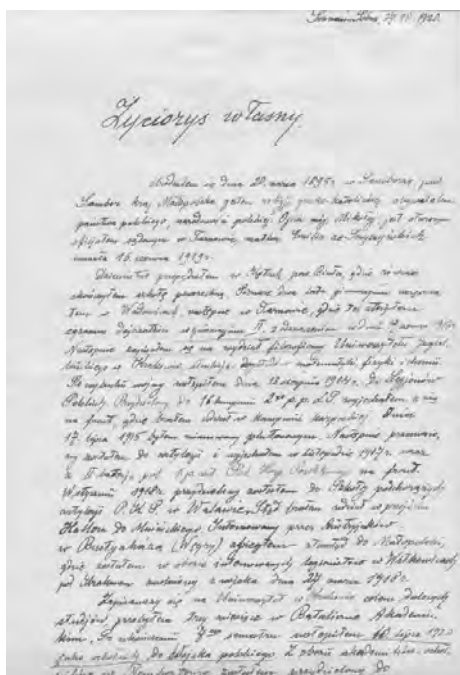
5. Legitymacja studencka Kaczmarza z UJ

Cursus		Per <i>Trimestre</i> <i>primum</i> <i>semestre</i>		N ^{rus} 17820		
		anni scholastici 1921/22				
Nomen Magistri	Index scholarum	Quot per annum abhominantur habitationibus	Didactrum solentium aut immunitatum datam testatur Quaeqstior	Receptum nomen	Scholae frequentat	Adnotata
Prof. Dr. Zaremby	Oeconomia	2	58.	S. Z.	S. Z.	Semestre absolutum testatur Decanatus Stempel za 30 kalenry za potwierdzenie jednego półroczca h. t. Decanus
Dr. H. Hoborski	Geometria		1. 102	Stok		
Dr. W. Wilkosz	Arithmetica		WPLACONO	M. K.		
	Wzajemny		WPLACONO	Kacz		
Dr. Stozka	Oeconomia		WPLACONO	W. K.		
Dr. Natanson	Arithmetica		WPLACONO	W. K.		

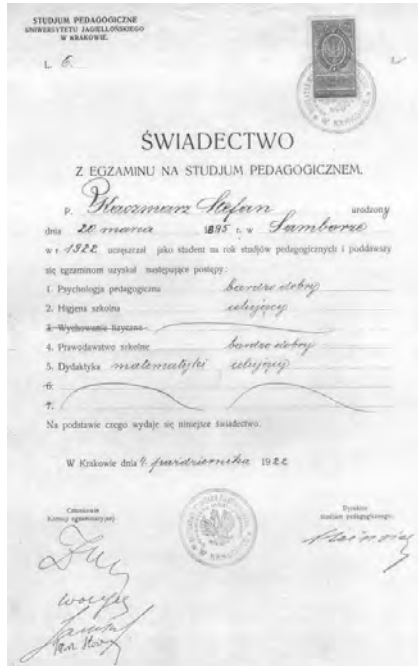
6. Dwie strony indeksu UJ Kaczmarza nr 17820 z podpisami Zaremby, Hoborskiego, Wilkosza, Stożka i Natansona



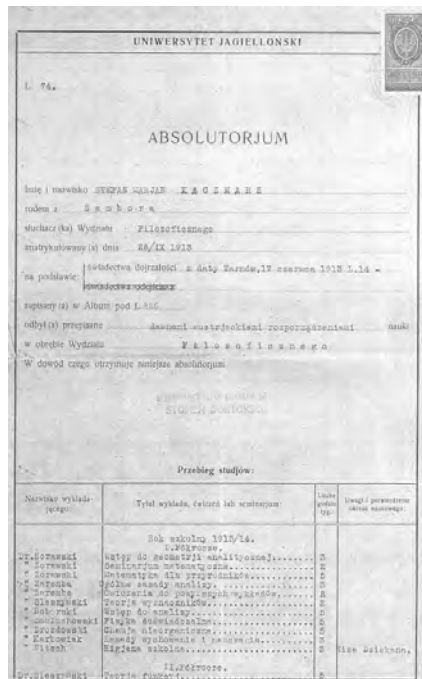
7. Kaczmarz i dwóch kolegów ze Szkoły Podchorążych



8. Życiorys pisany własnoręcznie 27 X 1920 r. przez Kaczmarza w Szkole Podchorążych



9. Świadectwo z egzaminu na Studium Pedagogicznym UJ (1922)



10. Pierwsza strona absolutorium Kaczmarza na UJ z 1922 r.



11. Stefan Kaczmarz w latach dwudziestych

1 października 1921 roku Kaczmarz rozpoczął pracę jako asystent w Akademii Górniczej [obecnie AGH] w Krakowie w Katedrze Matematyki, w której pracował do 30 września 1923 roku.

W międzyczasie, tzn. w okresie 1 września 1922 - 31 sierpnia 1922, Kaczmarz uczył w Prywatnym Gimnazjum żeńskim im. Heleny Kaplińskiej w Krakowie (klasy IV i VII). W 1923 r. przeniósł się, za namową Banacha, do Lwowa na Politechnikę. Na Politechnice Lwowskiej pracował od 1 października 1923 r. do 30 września 1939 roku i było to w II-jej Katedrze Matematyki Wydziału Mechanicznego Prof. Antoniego Łomnickiego. Dokładny przebieg jego pracy był następujący: w okresie 1 IV 1924-30 IX 1924 był młodszym asystentem z 30 godz. zajęć dydaktycznych tygodniowo, a w okresie 1 X 1924-31 XII 1934 starszym asystentem by ostatecznie na okres 1 I 1935-31 VIII 1941 zostać adiunktem. W zachowanych dokumentach można wyczytać, że Kaczmarz w 1934 roku zarabiał 85 zł plus 60 zł dodatku wyrównawczego miesięcznie, a zarobek w okresie 1 IX 1937-31 VII 1939 wynosił 170 zł miesięcznie. W dokumencie zaś dotyczącym jego zarobków do emerytury w 1935 r. odnotowano, że ze stałej pracy zarobił 3.090 zł w gotówce łącznie ze wszystkimi dodatkami.

Wykłady i ćwiczenia jakie Kaczmarz prowadził na Politechnice Lwowskiej, na Wydziale Ogólnym lub Wydziale Rolniczo-Lasowym były następujące:

- Geometria analityczna płaska i przestrzenna (od 1924/25 do 1932/33: 3 godz. wykład + 1 godz. ćw.),
- Wybrane działy analizy wyższej (1925/26: 2 godz. wykład),
- Równania całkowe (1926/27 i 1927/28: 2 godz. wykład),
- Krzywe algebraiczne (1927/28: 2 godz. wykład),
- Szeregi trygonometryczne (1929/30: 3 godz. wykład),
- Zasady algebry (1930/31: 3 godz. wykład),

- Arytmetyka teoretyczna (1931/32: 3 godz. wykład),
- Geometrie nieeuklidesowe i teorie grup (1932/33: 3 godz. wykład),
- Matematyka stosowana (1937/38 i 1938/39: 2 godz. wykład + 2 godz. ćw.).

Natomiast na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Jana Kazimierza (UJK) prowadził następujące zajęcia:

- Geometria analityczna (1930/31: 2 godz. wykład + 2 godz. ćw.),
- Geometria nieeuklidesowa (1930/31 i 1931/32: 2 godz. wykład),
- Specjalne działy geometrii różniczkowej (1934/35: 2 godz. wykład),
- Matematyka stosowana (1935/36 i 1936/37: 2 godz. ćw.),
- Matematyka dla przyrodników (1936/37 i 1938/39: 3 godz. wykład + 2 godz. ćw.).

W roku akademickim 1939/1940 na UJK w spisie wykładów znajdujemy następujące wykłady docenta Kaczmarza:

- Matematyka dla przyrodników, 3 godz. czwartek, piątek, sobota 8-9 (Sala XII),
- Ćwiczenia z matematyki dla przyrodników, 2 godz. wtorek 18-20 (Sala II),
- Zarys historii matematyki, 1 godz. środa 18-19 (Sala XII).



12. Kaczmarz z pracownikami Prywatnego Gimnazjum Humanistycznego żeńskiego im. SS. Naświętszej Rodziny z Nazaretu (Kaczmarz stoi w środku)

Uczył on też w gimnazjach lwowskich w roku 1923/1924, w Państwowym Gimnazjum im. Króla Stefana Batorego we Lwowie był nauczycielem kontraktowym matematyki

w dwóch klasach pierwszych (8 godz. tygodniowo) i w latach 1924-1939 w Prywatnym Gimnazjum Humanistycznym żeńskim im. SS. Najświętszej Rodziny z Nazaretu (zwanym też Gimnazjum Sióstr Nazaretanek) we Lwowie przy ul. Unii Lubelskiej 9 (uczył w nim 12 godz. tygodniowo).

W zaświadczeniu z dnia 24 lutego 1931 r. kierownik tego gimnazjum dr J. Włodkówna napisała, że

Dr. Stefan Kaczmarz przez cały czas swej pracy nauczycielskiej w tutejszym zakładzie odznaczał się sumiennością w spełnianiu obowiązku i znajomością przedmiotu, dlatego też wyniki pracy jego są bardzo owocne.

13 października 1924 roku Kaczmarz obronił doktorat *O związkach między pewnymi równaniami funkcyjnymi i różniczkowymi* na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Promotorem był Stanisław Ruziewicz.

W 1924 roku Kaczmarz opublikował też swoją pierwszą pracę matematyczną *O równaniu funkcyjnym $f(x) + f(x + y) = \varphi(y) f(x + y/2)$* w *Fund. Math.* 6(1924), 122-129. Zawiera ona rezultaty z jego doktoratu. 28 października 1925 roku został też podporucznikiem rezerwy.

W latach 1927-1929 Kaczmarz uczestniczył w następujących konferencjach: I Kongres Matematyków Polskich we Lwowie (7-10 IX 1927) z odczytem *Warunki zbieżności szeregów Ortogonalnych*, Międzynarodowy Kongres Matematyków w Bolonii (3-10 IX 1928) z odczytem *Über eine Anwendung der Funktionalen an die Orthogonalreihen* oraz I Kongres Matematyków Krajów Słowiańskich w Warszawie (23-27 IX 1929) z odczytem *Über ein Orthogonalsystem*.



13. Kaczmarz wśród matematyków I Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich w Warszawie w roku 1929 (Kaczmarz stoi na samej górze w tle środkowych, otwartych drzwi)

Kaczmarz pracował razem z Orliczem w katedrze Łomnickiego. Byli oni dobrymi kolegami pomimo, że Kaczmarz był 8 lat starszy od Orlicza. Gdy Orlicz ożenił się 12 lipca 1928 r. Kaczmarz napisał 30 lipca 1928 r. z Łacienia następujący list z życzeniami:

Kochany Władziu! Wróciwszy kilka dni temu z dwutygodniowego urlopu zastałem najnie-spodziewanej w świecie zawiadomienie o Twoim ślubie. Przyjmijcie więc od nas obojga, aczkolwiek spóźnione lecz niemniej szczerze, serdeczne życzenia wszelkiej pomyślności i szczęścia w tym nowym okresie życia. Całuję Cię serdecznie, dla Twej Pani załączam ucałowania rączek. Stefan.

Orlicz pisząc do Kaczmarza zwracał się do niego przez Pan. Tak też pisał 27 grudnia 1928 roku:

Panie Doktorze! Zysyłam Panu serdeczne pozdrowienia z Getyngi. Życie na razie ułożyło się jako tako. W sprawie funkcji prawie periodycznych nie mogę na razie Panu donieść nic ciekawego. Nie mogłem na razie dogonić początku wykładu Bohra z tego przedmiotu (...). Chodzę na seminarium Cantora-Bohra w program, którego wchodzi między innymi również zmienna rzeczywista. Otóż nie jest wykluczone, że po świętach będę tam referował jako zastosowanie twierdzenia Riesza-Fischera tw. Rademachera i ewentualnie coś podobnego. Zasadniczo mówił Bohr w ten deseń żeby to referować, ale nie wiem czy wielkie trudności językowe na to pozwolą. W każdym razie proszę Pana bardzo aby Pan był tak łaskaw, w związku z tem nadesłać mi dowód Banacha na nierówność Rademachera. Bardzo bym też Pana prosił, jeżeli to możliwe, o manuskrypt Pańskiej pracy (wiem, że ma ich Pan kilka). Może uda mi się też i z tych rzeczy coś przemycić z wiadomej Panu książki. Chciałbym się nareszcie wziąć do tych rzeczy. Sprawa jest bardzo pilna więc Proszę Pana o rychłą odpowiedź.

Co słyhać nowego o rzeczach ortogonalnych? Neumann wykłada obecnie rozwinięcia ortogonalne w Berlinie. Będę usiłował wejść z nim w kontakt. Co słyhać z tym tw. Riesza o którym rozmawialiśmy przed wyjazdem? Czy udało się coś zrobić? Bardzo będę Panu wdzięczny za rychłą odpowiedź.

Proszę przyjąć też odemnie najserdeczniejsze życzenia rokującego Nowego Roku. Łączę uścisk dłoni. Orlicz.

22 listopada 1929 roku Kaczmarz uzyskał habilitację z zakresu matematyki na Uniwersytecie Jana Kazimierza we Lwowie. Miała ona tytuł *O zbieżności i sumowalności rozwinięć ortogonalnych*. Wydany we Lwowie w 1929 roku autoreferat liczył 16 stron, a wykład habilitacyjny miał tytuł *O przestrzeniach abstrakcyjnych*.

4 stycznia 1930 roku urodziła się Kaczmarzowi pierwsza córka Krystyna. Antoni Zygmund w liście z Cambridge w Anglii z 23 kwietnia 1930 roku przesłał mu następujące gratulacje:

Pozwól, że zacznę od złożenia Ci (w żony i moim imieniu) serdecznych życzeń z powodu ojcostwa. Mamy nadzieję, że córeczka chowa się dobrze, choć pewnie sprawia Państwu na razie trochę kłopotu. (...).



14. Stefan Kaczmarz z córką Krystyną

W 1930 roku Kaczmarz starał się o stypendium do Anglii i podpytywał się o podróż do tego kraju Antoniego Zygmunda. Ten ostatni odpowiedział mu listownie z Wilna (list z 10 grudnia 1930 roku):

Mój Drogi. List Twój otrzymałem wczoraj i śpieszę odpowiedzieć, tak jak potrafię, na Twe zapytania. Droga z Warszawy, przez Berlin, Kolonię, Brukselę, Ostendę, Dover, do Londynu kosztuje (klasa 3a - bo ja nigdy inną nie jeździłem) sto pięćdziesiąt kilka zł. Trwa ona 37-8 godzin. Istnieje droga krótsza o dobrych kilka godzin i prowadząca przez Holandię, ale nią będą tylko wagony 1-ej, 2-ej klasy. Nawet jeżeli się bierze 3ą klasę na pociąg to może lepiej wziąć 2ą na Kanal.



Zjazd Kół Matematyczno-Fizycznych (Lwów 1930). 1 — L. Chwistek, 2 — S. Banach, 3 — S. Loria, 4 — K. Kuratowski, 5 — S. Kaczmarz, 6 — J. P. Schauder, 7 — M. Stark, 8 — K. Borsuk, 9 — E. Marczewski, 10 — S. Ulam, 11 — A. Zawadzki, 12 — E. Otto, 13 — W. Zonn, 14 — M. Puchałlik, 15 — K. Szpunar

15. Matematycy lwowscy (1930)

3 czerwca 1931 roku Kaczmarz uzyskał Dyplom nauczyciela szkół średnich. Państwową Komisję Egzaminacyjną we Lwowie dla kandydatów na nauczycieli szkół średnich, Oddział dla egzaminów uproszczonych stanowili: Kazimierz Chyliński (Prezes Komisji), Stefan Banach i Stanisław Ruziewicz.

Egzamin na nauczyciela matematyki w szkołach średnich ogólnokształcących i seminariach nauczycielskich z polskim językiem nauczania odbywał się etapami. Etapy egzaminu zostały jednak skrócone (na podstawie ustaw z 1922, 1923 i 1931 roku) w stosunku do podobnych procedur odbywanych wcześniej (można tu jako przykład porównać z kilkuletnią procedurą Orlicza – patrz [M03]). 19 maja 1931 roku odbył się egzamin pisemny. Tematy egzaminacyjne to:

- 1) Dany jest punkt A wewnątrz koła, o promieniu danym R . Poprowadzić tak sieczną przez punkt A , by punkt A dzielił cięciwę w złotym stosunku.
- 2) W dany wycinek wpisać koło.

Tę część zdał on na bardzo dobry; 3 czerwca 1931 r. odbył się egzamin ustny. Pytania z matematyki, jakie otrzymał, to omówić tematy: aksjomatyka geometrii, indukcja zupełna, liczby kardynalne i porządkowe, liczby niewymierne według Cantora i Dedekinda, przestępność liczby π i konsekwencje geometryczne, przekroje stożka (geometria wykreślna). Egzaminu z literatury polskiej, historii Polski i geografii Polski kandydat nie zdawał, ponieważ ukończył szkołę średnią.

W dniach od 23 do 25 września 1931 roku Kaczmarz uczestniczył w II Kongresie Matematyków Polskich w Wilnie, a 6 października 1931 r. urodziła mu się druga córka Zbysława. Ponadto otrzymał stypendium Funduszu Kultury Narodowej na wyjazd do Anglii i Niemiec.

Spędził więc 8 miesięcy w Cambridge u G. H. Hardy'ego (24 I - 3 VI 1932), a później kolejne 2 w Getyndze. W Cambridge słuchał m. in. wykładów N. Wienera o *calce Fouriera*.



16. Kaczmarz z dwiema córkami

21 października 1931 roku Zygmund pisał z Wilna do Kaczmarza po tym, jak już było wiadomo, że Kaczmarz otrzymał stypendium do Anglii:

Mój Drogi. Zsyłam, wraz z żoną, Tobie i Twojej Pani najlepsze życzenia z okazji drugiej córki. Życzymy też żebyś za trzecim razem miał już syna. Winszuję Ci otrzymania stypendium Funduszu Kultury; mam przekonanie, że Anglia jest krajem w którym będziesz najwięcej mógł skorzystać, tak się obecnie bowiem składa że od b. r. akad. Hardy przeniósł się do Cambridge, a więc będziesz miał tam wszystkich na miejscu. Oczywiście przyda Ci się wpaść chociażby na kilka dni do Oxfordu, ale poznanie miasta oraz zawarcie znajomości z Titchmarshem, który obejmuje miejsce po Hardym.

Adresy wszystkich 3 matematyków którzy Cię najbardziej będą obchodzić (Hardy, Littlewood, Paley) są: Trinity College, Cambridge (England). Należy napisać do jednego z nich np. Hardy'ego zawiadamiając go o swoim przyjeździe i, może, zapytaniem czy on i Littlewood nie będą mieli nic przeciw temu, jeżeli będziesz, podczas swego pobytu, zwracał się do nich o rady w różnych sprawach matematycznych. Ponieważ już korespondowałeś z Paley'em, więc zawiadom i jego o swoim przyjeździe. Oczywiście możesz być pewien najżyczliwszego stosunku do Ciebie. O ile pamiętam trysemestr II rozpoczynają w Cambridge około 20 stycznia. Po przejeździe przez Londyn zorientujesz się co do dokładnego terminu z gazet, i w razie gdybyś miał trochę dni wolnych, mógłbyś przesiedzieć w Londynie. W Cambridge pewnie będziesz musiał wziąć hotel chociażby na 1 noc. Radziłbym Ci wziąć hotel „Bellevue”, najtańszy zachwalany przez Anglików na pędcie. Na dworcu w Cambridge dowiesz się którym autobusem jechać. Przy szukaniu mieszkania może Ci pomóc Paley lub Ursell (ten młodzien jest wyjątkowo uczynny; n. b. – bardzo dobry matematyk; młody). Wysłałem już list do pp. Kejlin (Polacy) mieszkającej od dawna w Cambridge czy nie mają nic przeciw temu żebyś się do nich zwrócił po pewne informacje. Mam zupełną pewność, że o ile nie wyjechali, to się bardzo chętnie zgodzą. Wtedy prześlę Ci ich adres (Jest to formalność na którą jednak, jak sam zobaczysz, Anglicy są bardzo wrażliwi). Mam nadzieję, że jeszcze będę miał od Ciebie list przed wyjazdem. Serdeczny uścisk dłoni dla Ciebie i ucałowania rączek dla Pani. Szczerze Twój A. Zygmund.

Kaczmarz poinformował Hardy'ego i Paley'ego o swoim przyjeździe do Anglii i otrzymał od nich listy z następującymi odpowiedziami:

Trinity College, Cambridge

Dear Dr Kaczmarz. I am glad to hear that you will be coming to England for a time. The time is not a bad one, since there are a number of people here (e. g. Paley, Verblunsky) interested in You own subjects. Also Norbert Wiener is here, and will be lecturing next term on Fourier transforms and applications. I observe that term begins on Jan. 12, 1932: lectures a day or two later.

With kind regards. I am Yours very sincerely, GH Hardy.

Zygmund could no doubt give you some useful advice about visiting England.

A teraz list Paley'ego do Kaczmarza z 21 grudnia 1931 pisany z hotelu Bellevue w Szwajcarii:

Dear Dr Kaczmarz, Many thanks for your letter. I am much interested to hear you will be in Cambridge next term, and hope that we shall have such opportunity for discussing mathematics. I shall be very grateful if you will show me a note either just before or just after you arrived, with your address.

I read with interest the results which you mention in you letter. One of them however can be obtained quite easily from a recent (unpublished) result of my own. I prove the following theorem

Let $\varphi_n(x)$ be a normalized orthogonal system in the interval $(0, 1)$. Let $\sum d_n^2 = \infty$. Then we can find a continuous function $f(x) \sim \sum a_n \varphi_n(x)$ such that the series $\sum |a_n d_n|$ is divergent.

If now for example we take $\sum d_n^2 = \infty$, $\sum |d_n|^q = 1$, where $1/(2-\varepsilon) + 1/q = 1$, then

$$\sum^N |a_n d_n| \leq \left(\sum^N |a_n|^{2-\varepsilon} \right)^{1/(2-\varepsilon)} \left(\sum^N |d_n|^q \right)^{1/q}$$

and thus if $\sum |a_n d_n|$ diverges, then so does $\sum |a_n|^{2-\varepsilon}$. Clearly we can also find functions for which $\sum |a_n|^2 \log(1/|a_n|)$, $\sum |a_n|^2 \log_2(1/|a_n|)$, etc. respectively diverge.

The condition $|\theta_n(x)| < K$ is, I think, (I have not the manuscript here) unnecessary.

Please excuse the time I have taken in answering your letter. Yours sincerely, R. E. Paley



17. Stefan Kaczmarz

I jeszcze list Titchmarsha do Kaczmarza (Kaczmarz był już wtedy w Cambridge) z 5 marca 1932 r., pisany z Oxfordu:

Dear Dr Kaczmarz, I shall be here when you are in Oxford, and shall be very glad to see you. Will you come to tea on March 11, about 4 p. m., if you are here then. If you are not here so soon, you will find me here almost any time. The best way to get here is to get a bus to Summertown, going up the Bamburg Road. See figure on the next page. Map of Oxford (...).

We are about two miles of Oxford. I hope you will find it.

Yours sincerely, E. C. Titchmarsh.

Z pobytym Kaczmarza w Anglii wiążą się następujące historyjki i żarciki:

- W 1932 roku Kaczmarz pojechał na Uniwersytet w Cambridge. Spotkał tam Norberta Wienera, który wizytował Cambridge na szkole letniej, który powitał go w ich wspólnym języku, niemieckim:

„Ah! Ich habe von Ihnen gehört” [Słyszałem o Panu!].

- W liście A. Lernerera do P. C. Parksa (z 23 kwietnia 1991): One amusing item which I remember is a remark of Wiener about Kaczmarz's name. He said that *English people may think that the consonants sound strange and Polish. On the other hand, apart from the first letter, they are all exactly as in Titchmarsh!*

- Wspomina Krystyna Dziedzic – starsza córka Kaczmarza (historię zapamiętała dobrze choć miała wtedy 5-7 lat) [przekazała mi ją telefonicznie 28 IV 2006]:

W 1935, 1936 lub 1937 roku angielski matematyk był we Lwowie z żoną (jako rewizyta Kaczmarza w Anglii; czyżby to był Hardy?¹ i odwiedził Kaczmarza w jego mieszkaniu. W pewnym momencie chciał pokazać, że zna polskie słowa i patrząc w okno powiedział: „Niebo bez chmu”.

Wszyscy niestety patrzyli na niego z konsternacją nie rozumiejąc co on chce powiedzieć. On nie mógł jednak wypowiedzieć litery „r” na końcu i całość miała brzmieć „Niebo bez chmur”.



18. Stefan Kaczmarz z żoną i córką Krystynę

¹ Godfrey Harold Hardy (1877-1947) był w Polsce, ale nie miał chyba żony, więc nie mógł to być on. Mógł to być John von Neumann (1903-1957), matematyk amerykański węgierskiego pochodzenia, nazywany przez niektórych – Gaussem XX wieku, przyjeżdżał do Polski w okresie międzywojennym trzykrotnie (Lwów odwiedził dwukrotnie). Pierwszy raz w 1927 roku, gdy przybył do Lwowa na Zjazd Matematyków Polskich. Był już sławny z odkryć w podstawach matematyki i teorii mnogości. W lipcu 1937 roku spędził kilka dni we Lwowie, wygłosił odczyt w Towarzystwie i wpisał kilka problemów do Księgi Szkockiej. Miał dwie żony: Marietta Kovesi (rozwód w 1937 r.) i od 1938 Klara Dan. Mógł to też być Norbert Wiener (1894-1964). Ojciec jego pochodził z Białegostoku i był znawcą języków słowiańskich. W 1926 r. ożenił się z Marguerite Engelmann. Lata 1931-1932 spędził w Anglii wizytując Hardy'ego w Cambridge. Zmarł w Sztokholmie 18 marca 1964 r. (drugi zawał serca). Nie wiem tylko czy i kiedy on był we Lwowie? A może Edward Charles Titchmarsh (1899-1963), uczeń Hardy'ego. Napisał ważne książki: The Zeta-Function of Riemann (1930), The Theory of Functions (1932) i Theory of Fourier Integrals (1937). W 1925 r. ożenił się z Kathleen Blomfield, z którą miał trzy córki. Nie wiem tylko czy i kiedy on był we Lwowie? I jeszcze jeden kandydat. Raymond Edward Alan Christopher Paley (1907-1933), student Hardy'ego i Littlewooda, pracujący wspólnie również z Zygmuntem, Wienerem i Pólyą. Raczej nie był to on, bo zginął 7 kwietnia 1933 roku w Kanadzie przysypany przez lawinę.

1 stycznia 1935 roku Kaczmarz awansował na adiunkta na Politechnice Lwowskiej w Katedrze Łonnickiego. W następnym roku uczestniczył w Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Oslo (20-30 VII 1936) z odczytem *On the orthogonal series*. Kaczmarz jechał na Kongres przez Szwecję, Danię i Niemcy. Przy powrocie z Kongresu, Kaczmarz nie miał wszystkich potrzebnych wiz, ale uzyskiwał je do każdego kolejnego kraju w kraju poprzednim (wizę szwedzką w Norwegii, wizę duńską w Szwecji i wizę niemiecką w Danii). W dniach od 9 września do października 1937 roku uczestniczył w III Kongresie Matematyków Polskich w Warszawie (29 IX-2 X 1937) z odczytem *Sur une equation integrale*, a w 1938 roku został porucznikiem rezerwy.



20. Paszport Kaczmarza z wizą norweską (1932)

Omówmy teraz sprawę rodziny Kaczmarza. Ożenił się on z Heleną Firlicińską (ur. 14 IV 1904-zm. 2 VIII 1994 we Wrocławiu). Ślub ich odbył się 26 grudnia 1928 roku w kościele parafialnym w Nowym Sączu. Helena była nauczycielką szkoły powszechnej w Kasińce Małej na Podkarpaciu, a po wyjściu za mąż zamieszkała we Lwowie i zajmowała się dziećmi. Kaczmarz mówił bądź pisał do niej *Lusienko*, podpisując się *Stefek*.

Mieli oni dwie córki:

- Krystynę po mężu Dziedzic (ur. 4 I 1930 we Lwowie). Magister farmacji. Była ona kierownikiem apteki szpitala powiatowego w Dzierżoniowie. Mieszka nadal w Dzierżoniowie. Jej dzieci to: Magdalena po mężu Kielan (ur. w 1957 r.) i Beata po mężu Szymura (ur. w 1963 r.).
- Zbysławę Kaczmarz-Lepecką (ur. 6 X 1931 we Lwowie - zm. 23 XI 2003 we Wrocławiu). Magister inż. melioracji rolnictwa. Pracowała w PRN we Wrocławiu, bezdzietna.

Kaczmarzowie mieszkali we Lwowie, najpierw na ul. Modrzejewskiej 16 (lata 1931-1934), później na ul. Małachowskiego 2, blok I, brama I (1935-1936) i następnie na ul. Pełczyńskiej 17 (lata 1936-1939) [tu na zapleczu były Wzgórza Wuleckie, gdzie rozstrzelano profesorów 4 lipca 1941 roku - w tym Antoniego Łomnickiego].

13 kwietnia 1940 roku rodzinę Kaczmarzów (żonę Helenę z dwiema córkami) wywieziono do Kazachstanu z powodu donosu ukraińskiego dozorczy, który przekreślił słowo *adiunkt* na *adiutant*. Przebywali oni pod adresem: Semipałatyńsk, stacja Żana-Semiej, pocztow. oddział Mięsnogokombinatu, Zakład Zapalek No. 1, barak No. 8.

Na szczęście rodzina wróciła jesienią tego samego roku, gdyż Prof. Eugeniusz Rybka (1898-1988), znany polski astronom, pisał do kancelarii Stalina i wyjaśnił omyłkowy wywóz rodziny Kaczmarza. Kaczmarz i Rybka byli przyjaciółmi z czasów Legionów Polskich. Zachował się nawet list, pisany po rosyjsku, do OBKOM KPU we Lwowie w imieniu zespołu matematyków, fizyków i astronomów lwowskich, profesorów Uniwersytetu i Instytutu Politechnicznego z prośbą o możliwość powrotu z Semipałatyńska, żony Kaczmarza Heleny z córkami Krystyną i Zbysławą, do Lwowa. Opiekę nad nimi ma przejąć siostra Heleny, Zofia Poluha zamieszkała we Lwowie przy ul. Pełczyńskiej 17. Prośbę podpisali Banach, Mazur, Łomnicki, Rubinowicz i Rybka.



21. Stefan Kaczmarz wśród legionistów (Kaczmarz siedzi pierwszy z prawej)

Gdy w sierpniu 1945 r. oficjalnie ogłoszono, że Lwów pozostaje w granicach Związku Radzieckiego, rodzina Kaczmarza (tzn. żona i dwie córki) zgłosiła się na wyjazd i we wrześniu 1945 r. wyjechali oni pociągiem repatriacyjnym ze Lwowa do Krakowa. Mieszkali oni w Krakowie od września 1945 r. do sierpnia 1946 roku. W sierpniu 1946 r. zamieszkali we Wrocławiu. Znajoma Eustachego Kaczmarza udostępniła im jeden pokój. Rodziną opiekował się Prof. Rybka. We Wrocławiu mieszkali na ul. Kopernika 11. Pani Helena Kaczmarzowa pracowała w Instytucie Astronomii Uniwersytetu Wrocławskiego jako sekretarka. Była ona główną sekretarką i *prawą ręką Prof. Rybki*. Zaprzyjaźniona z nią Pani dr Irena Garczyńska wspomina, że żyła ona Instytutem i na spotkaniach imiennowych mówiło się, że Instytutem *rządzą trzy piękne Heleny*. Tuż przed emeryturą w 1966 roku Pani Helena zamieszkała z córkami na pl. PKWN 12 m. 3.

Wróćmy teraz ponownie do Stefana Kaczmarza. Po pierwsze, we Lwowie (lub na Politechnice) mówiło się, że:

- Docent Stefan Kaczmarz jest życzliwy i uczynny dla swych młodszych kolegów.
 - Kaczmarz jest człowiekiem o wysokim autorytecie w swoim otoczeniu.
 - Kaczmarz należy do kręgu współpracowników Stefana Banacha – jest członkiem Lwowskiej Szkoły Matematycznej.
 - Docent Stefan Kaczmarz jest najbliższym współpracownikiem profesora Łomnickiego.
- 12 czerwca 1930 roku Łomnicki pisał z Getyngi do Kaczmarza na kartce pocztowej:

K. Panie Doktorze. Zjechałem na miesiąc do rozkosznej, cichej Getyngi, gdzie nerwy mogą odpocząć, a warunki pracy idealne. Ponieważ nie mogę się doczekać odpowiedzi od prof. Stożka na ważny list, przeto proszę mu to przypomnieć - o ile jest jeszcze we Lwowie, a o ile wyjechał, to proszę za nim wysłać kartkę, którą do niego równocześnie ślę. Kto jest rektorem? Co nowego na Politechnice? Co Pan robi z wakacjami? Ja około 15 lipca będę krótko we Lwowie; proszę klucze zostawić Szeremiecie lub na portierce. Łączę serdeczne pozdrowienia również dla P. Nikliborca. Co nowego w lwowskiej matematyce?. Podpis Łomnickiego i adres: Gaussstrasse 5

A teraz w sprawie Kawiarni Szkockiej. Kaczmarz oczywiście był w Kawiarni Szkockiej i postawił problem 130 w Księdze Szkockiej. Kaczmarz podał też rozwiązanie problemu 86 Banacha oraz wspólnie z A. Turowiczem problemu 109 Mazura i Ulama. Stanisław Ulam (1909-1984) pisze w artykule wspomnieniowym z Kawiarni Szkockiej [U69, str. 55]:

Kaczmarz, wysoki, bardzo szczupły, kolega Nikliborca, ukazywał się od czasu do czasu.

Kaczmarz był od 9 kwietnia 1936 roku członkiem Towarzystwa Naukowego we Lwowie a za swoje zasługi otrzymał następujące odznaczenia:

- 1929 – Medal Dziesięciolecia Odzyskanej Niepodległości (29 IV 1929)
- 1933 – Krzyż Niepodległości za pracę w dziele odzyskania niepodległości
- 1937 – Złoty Krzyż Zasługi za zasługi na polu pracy naukowej
- 1938 – Brązowy Medal za Długoletnią Służbę dla Politechniki Lwowskiej

Stefan Kaczmarz lubił chodzić po górach. Córka Krystyna pamięta, że co roku na wakacje jej rodzina jeździła w Bieszczady na wieś z rodziną Rybków (ta rodzina też miała 2 dzieci: syna – Przemka i córkę – Jadwigę). Byli np. w Jaremczu, Mikuliczynie i Rytrze. Nawet ostatnie wakacje 1939 r. spędzili w górach. Wieczorami Stefan Kaczmarz i Eugeniusz Rybka śpiewali pieśni legionowe, które ona potrafi zaśpiewać do dziś bo pamięta słowa.



22. Dokument przyznający Kacmarzowi Krzyż Zasługi

Wybuch II wojny światowej spowodował, że 2 września 1939 roku Kacmarz otrzymał przydział do Warszawy jako porucznik rezerwy. Na następny dzień wyjechał pociągiem w mundurze do Warszawy. 5 września 1939 r. przyszła do żony kartka pocztowa od niego z informacją, że jeszcze jest w Nisku. Była to ostatnia informacja od niego. Żona Kacmarza Helena napisała w liście do Orlicza (mam ten list):

3 IX 1939 roku rozkazem mobilizacyjnym został powołany jako porucznik rezerwy do służby wojskowej do Warszawy do Biura Zbrojeń. 5 IX 1939 przyszła kartka pocztowa, że jeszcze jest w rzeszowskim.

Treść na ostatniej kartce od Kacmarza do żony była następująca:

Kochana Lusieńko! Poniedziałek (4 IX) godz. 7 wieczór. Jestem w Nisku w drodze. Jak dotąd jadę wygodnie (dwóch w przedziale) i mam nadzieję przespać się porządnie przez noc. W drodze spotkałem brata min. Perańskiego, którego uspokoiłem, że we Lwowie jest u nich w porządku. Całuję Cię i dzieci mocno. Twój Stefan



23. Kartka pocztowa od Kaczmarza do żony Heleny (1939).
 Żona dopisała widoczne na kartce słowa „Ostatnia kartka”

2. Sprawa śmierci Kaczmarza (3 wersje)

Sprawa śmierci Kaczmarza jest ciągle niejasna. Ja przytoczę tutaj 3 wersje jego śmierci jakie dotychczas się pojawiły.

A. Pierwsza wersja: Kaczmarz zginął we wrześniu 1939 roku pod Umiastowem k. Ożarowa. Tak jest odnotowane w następujących miejscach.

A1) życiorys Kaczmarza pisany przez żonę Helenę po wojnie:

Dnia 3 września 1939 r. Stefan Kaczmarz - zgodnie z powołaniem wojskowym wyruszył w mundurze wojskowym ze Lwowa do Warszawy do Biura Zbrojeń. Brak danych gdzie i kiedy zginął. Istnieją dwa przypuszczenia: albo zginął w czasie nalotu na pociąg, którym jechał albo zginął w Katyniu.

UWAGA 1. Pani Helena pisała do niemieckiego Czerwonego Krzyża o jakieś informacje odnośnie męża. Zachowała się kopia ich odpowiedzi z 12 lutego 1940 roku, gdzie piszą, że sprawę przyjęli i ją zbadają. Niestety dalszego biegu sprawy nie znam.

A2) Władysław Orlicz [O64], str. 387:

Zmobilizowany we wrześniu w r. 1939 jako porucznik rezerwy, zginął pod Umiastowem. Orlicz cytuje przy tym informację, że Tadeusz Pretki był świadkiem śmierci Kaczmarza.

A3) Władysław Orlicz [O85], str. 156:

Zmobilizowany z początkiem wojny jako porucznik rezerwy, zginął we wrześniu 1939 roku pod Umiastowem. Jedyna informacja o okolicznościach śmierci Kaczmarza w czasie działań wojennych pochodzi od ob. Tadeusza Pretki, który był świadkiem Jego śmierci.

A4) Zbysława Kaczmarz, córka Stefana w liście ze stycznia 1987 r. do Stowarzyszenia Absolwentów Uniwersytetu Jagiellońskiego:

Odpowiadając na apel Stowarzyszenia zawarty w Nr 26/86 Tygodnika Powszechnego przekazuję dane dot. mojego Ojca, absolwenta Uniwersytetu Jagiellońskiego, który zginął we wrześniu 1939 r.

A5) Danuta Przeworska-Rolewicz [PR93], str. 131:

Zginął we wrześniu 1939 r. pod Umiastowem (znam nazwisko świadka śmierci).

A6) Patrick C. Parks [P93], str. 1267:

In 1939 as a Reserve Lieutenant, Stefan Kaczmarz was called up. He was killed in action during the German invasion of Poland in September 1939 near Umiastów [a small village some 20 km west of Warsaw]

Dziękował przy tym Pani Danucie Przeworskiej-Rolewicz za informacje o tragicznej śmierci Kaczmarza.

A7) Encyklopedia Powszechna PWN

KACZMARZ STEFAN (1895-1939), matematyk; od 1929 pracownik nauk. uniw. we Lwowie; prace z teorii funkcji rzeczywistych i szeregów ortogonalnych (monografia Theorie der Orthogonalreihen 1935, wspólnie z H. Steinhausem); zginął w walkach pod Umiastowem.

B. Druga wersja: Kaczmarz zginął w kwietniu lub maju 1940 roku w Katyniu. Tak stwierdza się w następujących miejscach.

B1) Bolesław Olszewicz [O47]: Wspomniano, że Kaczmarz został zabity w Katyniu.

Jednak ta lista zawiera wiele błędów, które było trudno zweryfikować w tamtym czasie.

Nikt z matematyków lwowskich nie mówił o zabiciu Kaczmarza w Katyniu.

B2) Janina Snitko-Rzeszut [SR89], str. 289:

We wrześniu 1939 r. por. Kaczmarz – żołnierz Legionów Polskich podczas I wojny światowej – znów został powołany do wojska; był oficerem płatnikiem w 22 pułku piechoty w Siedlcach.² Zginął w Lesie Katyńskim.

B3) Jędrzej Tucholski [T91], str. 128:

Kaczmarz Stefan Marian. Oficer rez. Matematyk, doc. Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Prawdop. Kozielsk.

B4) Zbysław Popławski [P92], str. 283 i 286:

Podczas okupacji niemieckiej 13 IV 1943 roku zostały ujawnione zbrodnie sowieckiego okupanta. W grobach katyńskich odkryto zwłoki m. in. por. rez. 22 Pułku Piechoty w Siedlcach dr. Stefana Mariana Kaczmarza, docenta matematyki.

² Jak pisze Izdebski w książce [Iz00, str. 295] płatnikiem 22 pułku piechoty w Siedlcach był por. Stefan Karczmarz. Nie jest to błąd drukarski. Por. rez. Stefan Karczmarz urodzony 1 maja 1905 r. był właśnie płatnikiem tego pułku. Po wojnie mieszkał w Siedlcach i Pan Izdebski rozmawiał z nim osobiście.

B5) Olesiak i Sułym [OS], str. 118 (omawiając postać Nikliborca piszą też parę słów o jego koledze Stefanie Kaczmazru):

Docent Stefan Marian Kaczmarz, zmobilizowany, brał udział w walkach pod Umiastowem, gdzie został ranny, a następnie internowany zginął w Katyniu. Prof. D. Przeworska-Rolewicz [PR93] podaje, że zginął we wrześniu 1939 r. pod Umiastowem. W książce Tucholskiego [T91] podano: „Kaczmarz Stefan Marian, Oficer rezerwy, Matematyk, doc. Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Prwadop. Kozielsk”.

B6) Sławomir Kalbarczyk [K01], str. 105:

We wrześniu 1939 r. powołany został do czynnej służby wojskowej jako oficer-płтник w 22. Pułku piechoty w Siedlcach.² Wzięty do niewoli sowieckiej, osadzony został w obozie w Kozielsku. Zginął w Katyniu.

Ponadto autor pisze, że poprzednie informacje jakoby zginął w kampanii wrześniowej są nieprawdziwe.

UWAGA 2. Książka Kalbarczyka wykorzystuje nieznanne dotąd źródła archiwalne, w tym teczki personalne aresztowanych pracowników nauki, pochodzące z Archiwum Służby Bezpieczeństwa Ukrainy oraz z lwowskiego oddziału Stowarzyszenia *Memoriał* i z ośrodka *Karta*. Ponadto autor pisze, że poprzednie informacje jakoby zginął w kampanii wrześniowej są nieprawdziwe (zarówno więc Orlicz jak i Przeworska-Rolewicz piszą błędnie według niego, że Kaczmarz zginął w kampanii wrześniowej 1939 pod Umiastowem).

B7) Roman Duda [D04], str. 283:

Stefan KACZMARZ (1895-1940). Docent matematyki na UJK, zatrudniony jako adiunkt na Politechnice Lwowskiej. Jako porucznik rezerwy został latem 1939 r. powołany do czynnej służby wojskowej w 22 pp w Siedlcach.² Wzięty do sowieckiej niewoli znalazł się w Kozielsku. Zginął w Katyniu. (Te ustalenia S. Kalbarczyka zapewne ostatecznie rozwiązują zagadkę śmierci S. Kaczmarza, o którym długo sądzono, że zginął w boju pod Umiastowem).

B8) Krystyna Dziedzic - córka Kaczmarza (tę informację uzyskałem od Pani Krystyny w rozmowie telefonicznej z 28 X 2005):

Po pierwsze, nie są jej znane losy ojca przed śmiercią. Po drugie, wie następujące informacje: 2 IX 1939 Kaczmarz otrzymał przydział do Warszawy. Wyjechał tam pociągiem następnego dnia. 5 IX 1939 przyszła kartka pocztowa, że *jeszcze jest w rzeszowskim* (w Nisku). Służąca Państwa Kaczmarzów podobno widziała jak *Pana* prowadzili Rosjanie. Było to między 17 września, a październikiem 1939 roku. Jest więc możliwe, że zginął w Katyniu, ale nie ma go w żadnym wykazie ofiar Katynia. Przed wyjazdem poprosił swojego dobrego kolegę Eugeniusza Rybkę, by ten się zaopiekował jego rodziną.

Napisałem do Instytutu Pamięci Narodowej w Warszawie by wyjaśnić sprawę śmierci Kaczmarza, gdyż nie ma go na żadnej liście ofiar Katynia (ani w internecie, ani w publikowanych listach ofiar) !!!

B9) Pisałem też do Pani Prof. Danuty Przeworskiej-Rolewicz (27 XI 2005) w związku z jej uwagą *Zginął we wrześniu 1939 r. pod Umiastowem (znam nazwisko świadka śmierci)* i książką Kalbarczyka. Jej odpowiedź była następująca (list z 8 XII 2005):

(...) Książkę Kalbarczyka znam i nie jestem o niej najlepszego zdania. Nawet jeśli podane przez niego fakty są prawdziwe, to udokumentowanie ich jest słabe. Nie dotyczy to tylko Kaczmarza. (...)

Na początku 1991 r. przyszedł list P. Parksa do Wydziału III-go PAN z zapytaniem, czy to prawda, że Stefan Kaczmarz zginął w Katyniu. Ten list przekazano do IM PAN i mnie powierzono zadanie odpowiedzi nań. (...) Wzięłam się więc do rzeczy i zaczęłam szukać odpowiednich materiałów. (...) Władysław Orlicz już nie żył, nie mogłam więc go spytać kto to był Tedeusz Pretko. Jedynym żyjącym jeszcze matematykiem, który znał matematyków lwowskich (i był we Lwowie czasu wojny) był Stanisław Hartman. On zresztą też umarł w kilka miesięcy później. Ale wówczas odbyłam z nim długą rozmowę telefoniczną; to co jest w liście do Parksa z ustnych przekazów (tj. nie udokumentowane), pochodziło od Stanisława Hartmana. On nigdy nie słyszał o „wersji katyńskiej”. On też mi podał nazwisko „naocznego świadka”, który już wkrótce umarł. Pominęłam wtedy jego nazwisko (bo wydawało mi się to nieistotne?), a teraz nie znalazłam żadnego śladu. Albo podałam w liście do Parksa (kolejnym, a ich kopii nie mam). Było i nie ma „jak w ruskim banku”. Przykro mi... W każdym razie, Stefan Kaczmarz we wrześniu 1939 r. nie mógł być jednocześnie pod Umiastowem (tj. na zachód od Warszawy, w czasie bitwy pod Bzurą) i w Siedlcach, jak pisze Kalbarczyk, tj. na wschód od Warszawy. Także 22-gi pułk piechoty tamże stacjonujący (wg Kalbarczyka) jest wątpliwy. Dość miarodajna pod tym względem Encyklopedia Wojskowa nie wymienia 22-ej dywizji piechoty wśród jednostek stacjonujących w początku września 1939 r. w Siedlcach. Ponadto 22 dyw. piechoty nie brała udziału w bitwie nad Bzurą. Moim zdaniem, jeśli istnieje kartka pocztowa z rzeszowskiego od Stefana Kaczmarza datowana, po 17 września 1939 r., to jest to bezsporny dowód, że on zginął z rąk Sowietów (a nie Niemców), ponieważ znajdował się za linią Sanu. To oczywiście przemawia za „wersją katyńską.”

UWAGA 3 (po rozmowie telefonicznej z Krystyną Dziedzic z 6 V 2006):

Nie było kartki z 17 września 1939 r. Niestety we wcześniejszej rozmowie telefonicznej źle zrozumiałem, że były dwie kartki z 4 IX 1939 i z 17 IX 1939. Okazuje się, że była tylko jedna kartka od Kaczmarza z 4 września 1939 r.

C. Trzecia wersja: Kaczmarz zginął jednak 5-6 września 1939 roku i to prawdopodobnie koło Niska.

C1) Niespodziewany list Pana Kalbarczyka wysłany do mnie 6 kwietnia 2006 roku. Nalegałem by autor książki [K01] podał mi źródła jego wywodów o śmierci Kaczmarza w Katyniu. A tu przyszedł od niego następujący list.

Otrzymałem Pańskie pismo w sprawie Stefana Kaczmarza. Jeszcze raz sprawdziłem wszystkie informacje na Jego temat i muszę przyznać się do błędu w mojej pracy „Polscy pracownicy nauki – ofiary zbrodni sowieckich w latach II wojny światowej”. Z najnowszych badań wynika, że Kaczmarz nie zginął jednak w Katyniu. Podając wersję o jego zamordowaniu w Katyniu oparłem się głównie na dwóch poważnych, jak się wydawało, opracowaniach, tj. biogramie w „Wojskowym Przeglądzie Historycznym” (1998, nr 4) oraz dziele Jędrzeja Tucholskiego [T91]. Okazuje się, że prace te podawały błędne informacje na temat okoliczności śmierci Kaczmarza.

*Jednocześnie informuję, że w/w książka powstała bez związku z moją pracą w Instytucie Pamięci Narodowej. W czasie zbierania materiałów i pisania IPN jeszcze nie istniał. Za wszelkie błędy w niej zawarte odpowiadam wyłącznie osobiście. Gdyby powyższe wyjaśnienia uznał Pan za niewystarczające, podaję mój adres mailowy: (...).
Z wyrazami szacunku, dr Sławomir Kalbarczyk.*

C2) 12 kwietnia 2006 roku odpisałem mu na ten list prosząc go o jego jakiegokolwiek informacje na temat śmierci Kaczmarza, gdyż chciałem w maju 2006, kiedy będę miał właśnie ten odczyt, podać ostateczną i prawdziwą wersję śmierci Stefana Kaczmarza. 19 kwietnia przyszła następująca odpowiedź od Pana Sławomira:

Radziłbym odrzucić wersję o Katyniu – co się nie potwierdziło – i uznać, że Kaczmarz poległ na wojnie. Tak ujmuję problem np. Hugo Steinhaus w swoich wspomnieniach. Przepraszam, że piszę tak zdawkowo, ale krańcowo brakuje mi czasu. Życzę udanego wystąpienia.

Kilkukrotnie jeszcze pisałem do niego, zwłaszcza o obecnych trzech wersjach śmierci Kaczmarza, ale nie otrzymałem dotychczas żadnej odpowiedzi.

Z rozmowy telefonicznej z Krystyną Dziejcz z 6 V 2006:

Brat żony Kaczmarza był po wojnie burmistrzem w Rozwadowie i dowiedział się od miejscowych ludzi, że na początku września 1939 r. było silne bombardowanie trasy kolejowej Rozwadów-Nisko. A więc może Kaczmarz zginął w czasie nalotu na pociąg, którym jechał.

Tak więc możliwe jest, że Kaczmarz zginął we wrześniu 1939 r. ale gdzie? Pod Umiastowem czy koło Niska?

3. Dorobek naukowy Stefana Kaczmarza – książka

Kaczmarz, współpracując z H. Steinhausem, opublikował jedną monografię w 1935 r. po niemiecku, w 1951 roku ukazał się jej przedruk, również po niemiecku, a w 1958 roku jej rosyjskie tłumaczenie oraz 32 prace naukowe opublikowane w latach 1924-1939 (w tym 12 prac w *Studia Mathematica*). Współautorami wielu prac byli: Władysław Nikliborc (1899-1948), Hugo Steinhaus (1887-1972), Józef Marcinkiewicz (1910-1940) i Andrzej Turowicz (1909-1989).

Kaczmarz zajmował się następującymi działami matematyki:

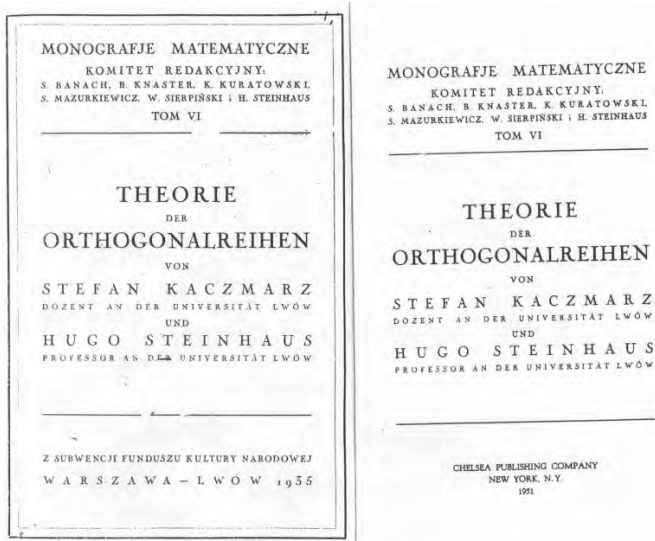
- a) Szeregi ortogonalne, a zwłaszcza zagadnienia zbieżności i sumowalności prawie wszędzie.
- b) Teoria funkcji rzeczywistych, w tym równania funkcyjne, dowody istnienia funkcji ciągłych wykazujących różnego typu osobliwości w każdym punkcie przedziału np. funkcjami ciągłymi nigdzie nie spełniającymi warunku Diniego, uogólniona

zbieżność (tzw. N -zbieżność względem N -modularu $I_N(f) = \int_0^1 N(f(x))dx$).

c) Zastosowania matematyki. Jest on twórcą pewnej metody o przybliżonym rozwiązywaniu dużych układów równań liniowych zwanej metodą Kaczmarza lub algorytmem Kaczmarza. Badał też krzywizny drogowe i opisał pewne przybliżone obliczenia algebraiczne.

Opublikował też prace w: transformacjach całkowych, analizie funkcjonalnej, szeregach liczbowych i aksjomatyce arytmetyki.

Należał do kręgu współpracowników Stefana Banacha i był członkiem Lwowskiej Szkoły Matematycznej. Monografia Stefan Kaczmarz i Hugo Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935, vi + 298 str., cena 5 \$ (wydana po niemiecku), była dużym osiągnięciem polskiej matematyki przedwojennej. Książka jest dostępna w internecie w Wirtualnej Bibliotece Matematyki (patrz [24]).



24. Strona tytułowa dwóch wydań książki Kaczmarza i Steinhausa

Powstanie i znaczenie tej książki opisane jest w listach bądź recenzjach:

Bronisław Knaster napisał w liście do Kaczmarza, jako członek Komitetu Redakcyjnego *Monografii Matematycznych* (10 XI 1935, list 2 stronicowy):

Drogi Kolego! Mam nadzieję, że otrzymaliście w porządku egzemplarz autorski dla Was (na lepszym papierze) i że różne drobne niedociągnięcia drukarskie nie rażą Was zbytnio. Jeśli są, darujcie nam. My tu pracujemy w warunkach dość prymitywnych i mimo najlepszej woli wkładają się różne przedziwne gady do naszej roboty. Nam książka Wasza podoba się tu bardzo. Uważamy, że jest piękna. Osobiście najserdeczniej Wam wieszczę jej ukończenia. Jednocześnie napisałem do Prof. Steinhausa.

Zażenowany jestem Waszym miłym stosunkiem do mej skromnej współpracy. Mogę Was zapewnić, że była mi ta współpraca bardzo przyjemna, mimo, że na mnie przypadły w niej obowiązki czysto techniczne i podrzędne, a to dlatego, że czułem przez cały czas wartość dzieła i najlepszą wolę jego autorów. Pragnę też, byście nie zachowali przykrego wspomnienia o mnie. Egzemplarzy autorskich otrzymujecie łącznie 30. Z tych rozestaliśmy 17: Auerbach, Sternbach, Zygmund, Zarankiewicz, Łomnicki, Orlicz, Saks, Whittaker, Hardy, Riesz, Carlslaw, Montel, Tonelli, Landau, Menchoff, Wiener, Rademacher oraz Wasz –razem

= 18; pozostałe 12 posłał mi prof. Steinhausowi paczką. (...) Jeszcze raz łączę me najlepsze gratulacje i życzę rychłego drugiego wydania. Serdecznie dłoń Waszą ściskam, Bronisław Knaster.

Recenzja książki napisana przez Adolfa Hammersteina (1888-1941) z Kolonii [H34]:

Monografia omawia ogólną teorię szeregów ortogonalnych jednej zmiennej rzeczywistej.

Recenzja książki napisana przez Gabor Szego (1895-1985) z St. Louis [S35]:

Teoria szeregów ortogonalnych w ostatnich 30 latach stała się popularna, zwłaszcza dzięki zastosowaniom w teorii równań całkowych i po odkryciu twierdzenia F. Riesz-Fischera. (...) Książka jest wielkim osiągnięciem i stanie się ulubioną przez koneserów i wielbicieli szeregów ortogonalnych, jak również będzie początkiem radości i użyteczności.

Recenzja książki napisana przez Adolphe Buhl-a (1878-1949) z Tuluz [B34]:

Matematycy polscy kontynuują badania otwarte, które wydają się gigantyczne w sensie wielkiej perspektywy. W tej książce zawarta jest teoria szeregów ortogonalnych, której współczesne badania nie rosną szybciej od gloryfikowanych badań Fouriera czy Sturm-Liouville. (...) Ma bogatą bibliografię choć brakuje nazwiska Pana Maurice Frecheta. Mimo wszystko książka jest pierwszej klasy.

Recenzja książki napisana przez A. Zygmunta (1900-1992) [Z35]:

Książka jest sukcesem matematyki polskiej, jako praca pionierska. Jest ona bowiem pierwszym dziełem, poświęconym teorii ogólnej układów ortogonalnych. (...) Autorowie jej są w Polsce (obok D-ra Orlicza) najlepszymi znawcami tej teorii i zawdzięcza im ona szereg ważnych wyników. (...) Należy dodać, że książka zawiera szereg wyników po raz pierwszy ogłoszonych drukiem. Wiele dowodów jest uproszczeniem dotychczas znanych. Za książkę tę należy się autorom wdzięczność ze strony nauki, a w szczególności nauki polskiej.

Jerzy Neyman (1894-1981) napisał w liście do Kaczmarza [N35]:

Szanowny Kolego. Właśnie otrzymałem Waszą książkę, wspólną z Prof. Steinhausem i jestem zachwycony. Znalazłem w niej szereg rzeczy, które mi są potrzebne do rozmaitych zagadnień statystycznych i których sam nie umiałem wyprodukować. Mam jednak parę drobnych trudności, które zapewne dla Was takowymi nie będą. Byłbym więc Wam bardzo wdzięczny gdybyście mi zechcieli dopomóc. Wyjeżdżam teraz na czas pewien (do 21 I) do Paryża. (...)

Łączę uprzejme pozdrowienia i najlepsze życzenia noworoczne. Jerzy Neyman.

Władysław Orlicz napisał w Polskim Słowniku Biograficznym [O64]:

Książka Kaczmarza i Steinhausa była pierwszą w literaturze światowej monografią poświęconą ogólnej teorii szeregów ortogonalnych.

Drugie wydanie książki Kaczmarza i Steinhausa, a właściwie poprawiony przedruk pierwszego wydania książki z 1935 roku, ukazało się w 1951 roku: Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tom 6, Chelsea Publishing, New York 1951, viii + 296 str., Hardcover 15 \$. Natomiast w 1958 roku ukazało się rosyjskie tłumaczenie tej książki tzn. S. Kačmaž i G. Steingauz, *Teoriya Ortogonal'nykh Ryadov*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1958, 507 str., cena 17 rubli i 50 kop., gdzie dodano 50% dodatkowego materiału napisanego przez R. S. Gutera i P. L. Uljanowa z Moskwy.

Wersja rosyjska ma przed wstępem adnotację: *Monografia S. Kaczmarza i H. Steinhausa jest jedną z lepszych książek w literaturze światowej z teorii szeregów ortogonalnych.*

Recenzja rosyjskiego tłumaczenia książki napisana przez Georga G. Lorentza (1910-2006) [Math. Reviews MR0094635 (20 #1148)]:

The translators have added 50% new material to this excellent German text.

4. Dorobek naukowy Stefana Kaczmarza – prace naukowe

Kaczmarz napisał 32 prace naukowe w latach 1924-1939. Podzielimy ich omówienie zaczynając od metody Kaczmarza, który to rezultat Kaczmarza jest najbardziej cytowany w literaturze, a następnie omówimy jego dorobek w układach ortogonalnych – jego głównej problematyce zainteresowań matematycznych.

4A. Metoda (algorytm) Kaczmarza z 1937 r.

Jest to metoda znajdowania przybliżonego rozwiązania układów równań liniowych o dużej liczbie zmiennych. Kaczmarz zauważył w 1937 roku, że zagadnienie wyznaczenia rozwiązania układu równań liniowych jest równoważne zagadnieniu wyznaczenia współrzędnych punktu, który leży na przecięciu hiperpłaszczyzn przedstawionych przez równania układu.

Procedura iteracyjna Kaczmarza na znalezienie przybliżonego x_1, x_2, \dots, x_n układu równań liniowych

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dla dużego n jest następująca:

Krok 1: Pomnożyć przez stałe tak by $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Krok 2: Pierwsze przybliżenie wybrać dowolnie $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ jako zerową grupę dla następujących grup zawierających po n przybliżonych rozwiązań

$$x_1^{(k,1)}, x_2^{(k,1)}, \dots, x_n^{(k,1)}, \dots, x_1^{(k,n)}, x_2^{(k,n)}, \dots, x_n^{(k,n)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

z których każda zawiera po n przybliżonych rozwiązań.

Krok 3: Definiujemy $(k + 1)$ -grupę następująco:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1,1)} &= x_i^{(k,n)} - a_{ij} \cdot L_1^{(k,n)}, x_i^{(k+1,2)} = x_i^{(k+1,1)} - a_{2i} \cdot L_2^{(k+1,1)}, \\ \dots, x_i^{(k+1,n)} &= x_i^{(k+1,n-1)} - a_{ni} \cdot L_n^{(k+1,n-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

do momentu, aż ciąg

$$x_1^{(r,s)}, x_2^{(r,s)}, \dots, x_n^{(r,s)}, \quad (s = 1, 2, \dots, n, r = 1, 2, \dots)$$

jest zbieżny do x_1, x_2, \dots, x_n , gdzie $L_i^{(r,s)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(r,s)} - b_i$.

Metoda ta jest zbieżna dla nieosobliwych macierzy $A = (a_{ij})$. Ostatnio metoda ta jest badana w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (Kwapień-Mycielski, 2001; Haller-Szwarc, 2005).

Metoda Kaczmarza ma duże znaczenie dla inżynierów.



25. Kaczmarz pracuje w swoim pokoju

W. Orlicz tak napisał o metodzie Kaczmarza [O80], str. 283:

Sukces odniósł Stefan Kaczmarz, który zginął w pierwszych dniach wrześniowej kampanii 1939 r. W roku 1937 ogłosił notę w Biuletynie Polskiej Akademii Umiejętności na temat przybliżonego rozwiązywania dużych układów równań liniowych. Miała ona charakter prekursorski. Istnieje poważne dwutomowe dzieło, wydane pod redakcją M. F. Beckenbacha pod tytułem „Nowoczesna Matematyka dla Inżynierów” (polskie tłumaczenie wydało PWN w 1962; wydanie po angielsku New York 1956). C. B. Tomkins, autor zawartego tam artykułu „Metoda najszybszego spadku” [T56], omawiając metodę Kaczmarza, stwierdza, że stanowi ona jeden z najprostszyc przykładów bardzo użytecznej metody szybkiego spadku. Wydaje mi się, że w okresie międzywojennym rachunek krakowianów Tadeusza Banachiewicza i metoda Kaczmarza były najważniejszymi polskimi osiągnięciami w zakresie analizy numerycznej.

Jako konkretne przykłady używania metody Kaczmarza w zastosowaniach przytoczymy kilka przykładów tytułów artykułów lub odczytów używających jego metody w tytule pracy: J. Markl, *Accelerating the Kaczmarz algorithm convergence in the case of input process time correlation* (1990), W. H. Weedon, *Application of Kaczmarz's method to nonlinear inverse scattering* (1997), F. Natterer, *The Kaczmarz method in nonlinear imaging* (1999), M. Burger i B. Kaltenbacher, *Regularizing Newton-Kaczmarz methods for nonlinear ill-posed problems* (2004), D. E. Mason, *Material surface energy and the Kaczmarz algorithm* (2004), C. Popa i R. Zdunek, *Kaczmarz extended algorithm for tomographic image reconstruction from limited-data* (2004).

Praca Kaczmarza była tak ważna, że została przetłumaczona na język angielski przez P. C. Parksa w 1993 roku i wydrukowana ponownie w angielskim czasopiśmie *International Journal of Control* w 1993 roku (zobacz [28]). Patrick C. Parks poprzedził tłumaczenie artykułem *S. Kaczmarz (1895-1939)* [P93], gdzie omawia on pracę Kaczmarza z 1937 roku oraz pisze o jego życiu i dorobku naukowym.

Patrick C. Parks (19?-1995) był profesorem w Royal Military College of Science w Anglii. Zwrócił on uwagę na doniosłość algorytmu Kaczmarza i dlatego też

przetłumaczył pracę Kaczmara z 1937 roku. Wydaje się, że tłumaczenie Parksa przyczyniło się do szerszego rozpropagowania metody Kaczmara. Parks wysłał też do druku pracę *Kaczmarz and stochastic approximation*, która miała ukazać się ze zdjęciem Kaczmara w *Artificial Neural Networks* (w materiałach z konferencji w Cambridge, June 26-28, 1995), o czym pisał jeszcze do Pani Prof. Przeworskiej-Rolewicz w grudniu 1994, dziękując jej za zdjęcie Kaczmara. Niestety, z powodu jego śmierci 16 lutego 1995 r. praca ta się nie ukazała.

W liście do Prof. Przeworskiej-Rolewicz z dnia 23 stycznia 1995 roku Parks pisał:

(...) It is clear from work by myself and other authors that Kaczmarz's algorithm explained in his paper of 1937 and modern modifications of it, are the only algorithms which seem fast enough for ON-LINE adjustment of weights in a neural network being used as a function approximator e.g. in on-line adaptive control applications. It is also clear that the so-called „stochastic approximation” technique of Robbins and Monro (circa 1951)³ can be regarded also as a modification of the original Kaczmarz algorithm in which the corrections are scaled down at each step of (discrete) time. Anyway, this is the theme of my poster, which also includes some of the history of Kaczmarz, as was published in the „Int. J. Control” a year ago or so ago with your help! With best wishes for 1995. Yours sincerely, Patrick Parks.



STEFAN KACZMARZ

Polish mathematician

Born Sambor, near Lvov, 1895

Killed in action, Poland, 1939

Docent, Jan Kazimierz University, Lvov;

Reserve Lieutenant Polish Army;

Author (with H. Steinhaus) of book:

"Theorie der Orthogonalreihen", Warsaw 1935,
2nd. edition, Chelsea, New York, 1951;

Active participant in the "Scottish Tea House"
group of mathematicians in Lvov;

Participant in course given by Professor
Norbert Wiener at Trinity College, Cambridge,
England, Spring of 1932;

Originator of "Kaczmarz's Algorithm"
for solving least mean squares (LMS)
problems, 1937.

26. Jedna strona odczytu Patricka Parksa z 1991 roku (jak on sam napisał: S. Kaczmarz „Vagraph” that I shall show at the 1st European Control Conference, Grenoble, France on 3rd July 1991)

³ Autor miał na myśli pracę [RM51].

Eduard Aved'yan w książce [A95] często stosuje algorytm Kaczmarza użyteczny w rozwiązywaniu równania, a właściwie równań liniowych opisujących zachowanie się nauczyciela (zobacz [A95], strony 17-30 oraz dodatek z wynikami używania algorytmu Kaczmarza i symulacjami; swoją drogą autor również informuje na str. 17, że metoda Kaczmarza była ponownie odkryta przez J. S. Albusa w 1975 roku!). Odnotujmy, że książka Aved'jana była wydana pod redakcją J. Masona i P. C. Parksa, po ich pobycie w Moskwie w październiku 1994 roku.

W pracy Benzi [B05] pojawia się (na stronie 11 manuskryptu) znowu informacja, że metoda Kaczmarza była ponownie odkryta około roku 1970 pod nazwą *Algebraic Reconstruction Techniques* (ARTs) i autor powołuje się tutaj na pracę [GBH70].

Wiele prac omawia metodę Kaczmarza, co można prześledzić przeglądając tylko tytuły prac z jego nazwiskiem jak np. [B84], [B05], [CEG], [HS05], [HN], [HN90], [KM01], [M77], [T56].

Metoda Kaczmarza trafiła też już do podręczników akademickich i można ją znaleźć np. w podręczniku Anton-Rorres [AR94, str. 690-693], przy rozważeniu tomografii komputerowej w rozdziale 11.13, gdzie pojawia się metoda Kaczmarza do przybliżonego rozwiązywania układów równań liniowych z większą ilością równań niż zmiennych.

4B. Układy ortogonalne

Układy ortogonalne były główną dziedziną badań naukowych Kaczmarza. Poświęcił jej 18 prac: [3]-[6], [8]-[13], [18], [21]-[23], [25]-[27], [29] i książkę [24]. Omówimy pewne ważne osiągnięcia kolejno.

4B1. Układ Walsh-Kaczmarza (1929)

Tak zwane układy Walsh'a i Walsh-Paley'a na $[0, 1]$ otrzymuje się jako iloczyn funkcji Rademachera ustawionych w różnym porządku. W 1929 r. Kaczmarz pierwszy zauważył, że układ funkcji Walsh'a może być wyrażony jako pewne proste kombinacje układu Haara. Taki układ uporządkowany w pewien sposób otrzymał w 1948 roku nazwę *układu Walsh-Kaczmarza*. Nazwę tę wprowadził w 1948 r. A. A. Shneider [S48] (patrz również [SWS], str. 2 i 511, [BR] i [GES]).

Stąd i ze znanych własności układu Haara wynikają pewne wnioski dla układu Walsh'a, np. jego zupełność oraz to, że jeżeli $f \in L^p$, $p \geq 1$ a p_n są sumami częściowymi rozwinięcia f według układu Walsh'a, to $\|f - p_{2^n}\| \rightarrow 0$ oraz $p_{2^n}(x) \rightarrow f(x)$ prawie wszędzie.

4B2. Zbieżność prawie wszędzie

Dla dowolnego układu ortogonalnego $\{\phi_n\}$ na $[a, b]$ twierdzenie Riesz-Fischera stwierdza, że dla dowolnego ciągu $(a_n) \in l^2$ istnieje funkcja $f \in L^2[a, b]$ taka, że jej współczynniki $a_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$ względem tego układu spełniają

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N - f\| = 0, \text{ gdzie } s_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x).$$

Zatem pewien podciąg s_{N_k} jest zbieżny prawie wszędzie na $[a, b]$. Stąd też bierze się niełatwa problematyka istnienia ciągu $w(n) \nearrow \infty$ by ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w(n)$ wynikała zbieżność prawie wszędzie na $[a, b]$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ przy dowolnym układzie ortogonalnym (φ_n) . Ciąg liczb $\{w(n)\}$ dający pozytywną odpowiedź nazywa się *mnożnikiem Weyla*.

Twierdzenie Mieśzowa-Rademachera (H. Rademacher 1922, D. Mieśzow 1923) stwierdza, że ciąg $w(n) = (\log n)^2$ jest mnożnikiem Weyla i żaden ciąg słabiej rosnący do ∞ niż $(\log n)^2$ nie daje mnożników Weyla dla dowolnego układu ortogonalnego. Trudną konstrukcję Mieśzowa częściowo uprościł Kaczmaz w [23].

Analogicznie można się pytać, w miejsce zbieżności prawie wszędzie, o sumowalność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ prawie wszędzie w sensie pewnej metody sumowalności. Następujący rezultat uzyskali niezależnie Kaczmaz [5] i Mieśzow.

Twierdzenie Kaczmarza-Mieśzowa (1927). *Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\ln \ln n)^2$ jest zbieżny, to szereg ortogonalny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ jest $C(0,1)$ – sumowalny prawie wszędzie tzn. sumy $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$ są zbieżne prawie wszędzie na $[a, b]$.*

Kluczową rolę przy dowodzie tego twierdzenia odgrywa następujący lemat, udowodniony przez Kaczmarza w 1925 roku:

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ jest $(C,1)$ – sumowalny prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy podciąg $S_{2^n}(x)$ jest zbieżny prawie wszędzie.

Lemat ten odgrywa też istotną rolę przy dowodzie twierdzenia Kaczmarza o związku między metodą sumowalności $(C,1)$ i ważną metodą sumowalności Abela. Przypomnijmy, że szereg liczbowy $\sum c_n$ jest sumowalny metodą Abela (metodą A) do granicy s , jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \rightarrow s$ gdy $r \rightarrow 1^-$. Każdy szereg sumowalny $(C,1)$ jest A -sumowalny ale niekoniecznie odwrotnie tzn. istnieją szeregi A -sumowalne, które nie są sumowalne $(C,1)$.

W 1925 roku Kaczmaz [3] udowodnił też zaskakujące twierdzenie:

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ jest prawie wszędzie sumowalny metodą Abela, to jest prawie wszędzie $(C,1)$ – sumowalny (do tej samej granicy).

W pierwszym uogólnieniu tego twierdzenia Kaczmarza zastąpiono średnie $(C,1)$ przez średnie Cesaro (C, α) , $\alpha > 0$, co zostało udowodnione przez Zygmunta [Z26], [Z27] i Kaczmarza [8]. Te idee Kaczmarza i Zygmunta o równoważności różnych metod sumowalności w sensie *prawie wszędzie* były zauważone przez Steina w [S82]. U Kaczmarza i Zygmunta pojawia się też po raz pierwszy *square function*, a mianowicie

$$K(f) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} n |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{z} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

i wykazują podstawową L^2 – nierówność

$$\|K(f)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}.$$

Dokładny opis tego dowodu podaje Stein [S82, str. 361], a na początku tego artykułu wręcz pisze:

It appears that square functions arose first in an explicit form in a beautiful theorem of Kaczmaz and Zygmund dealing with the almost everywhere summability of orthogonal expansions. The theorem was proved in 1926 as the culmination of several papers each had written at about that time. The theorem itself was an outgrowth of what certainly was one of the main preoccupations of analysts at that time, namely the question of convergence of Fourier series.

Omawiając dotąd problematykę zbieżności założenia dotyczyły współczynników (a_n) , a rezultaty były prawdziwe dla wszystkich układów ortogonalnych. Można jednak badać innego rodzaju kryteria zbieżności szeregów ortogonalnych robiąc odpowiednie założenia o tzw. funkcjach Lebesgue'a. Zaczniemy od rezultatów, które były obiektem zainteresowań Kaczmarza. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)w(n) < \infty$ dla $w(n) = \log n$, to szereg Fouriera

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest zbieżny prawie wszędzie. Wykazali to Kołmogorow-Silvestrow w 1924 r. (słabszą wersję) i w 1926 r. powyższą oraz niezależnie Plessner w 1925 r., Kaczmarz w 1927 r. (na konferencji) i 1929 r. (praca w *Studia Math.*) uogólnił to twierdzenie z szeregów trygonometrycznych na dowolne układy ortonormalne i na zbieżność prawie wszędzie na pewnym zbiorze; wtedy za wagę $w(n)$ trzeba wziąć monotoniczną majorantę funkcji Lebesgue'a na tym zbiorze.

Wynik Kołmogorowa-Silvestrowa i Plessnera nie ma dzisiaj żadnego znaczenia, bo sławne twierdzenie Carlesona zapewnia zbieżność prawie wszędzie szeregu Fouriera już przy warunku $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty$. Jednakże uogólnienie znalezione przez Kaczmarza jest nadal obiektem zainteresowań.

Jeżeli $\Phi = (\varphi_n)$ jest układem ortogonalnym w $L^2[a, b]$, tzn.

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 \text{ dla } m \neq n \text{ i } \int_a^b \varphi_n(x)^2 dx = C_n < \infty,$$

to sumy częściowe rozwinięcia $f \in L^2[a, b]$ można napisać w postaci

$$S_n(f, x) = \int_a^b f(x) D_n(x, t) dx \text{ gdzie } D_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \varphi_i(x)$$

jest jądrem Dirichleta i zgodnie z terminologią Rademachera funkcje

$$L_n(x) = L_n(\Phi, x) = \int_a^b |D_n(x, t)| dt$$

nazywamy funkcjami Lebesgue'a danego układu Φ . Kaczmarz udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie Kaczmarza (1929). *Jeżeli zachodzi warunek*

$$L_n(x) \leq w(n) \text{ dla } x \in A \subset [a, b], \quad n = 1, 2, \dots, \text{ gdzie } w(n) \uparrow \infty,$$

to dla każdego ciągu $\{c_k\}$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\int_A \max_{1 \leq k \leq n} w(k)^{-1/2} \left| \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i(x) \right| dx \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^n c_k^2 m A.$$

W szczególności, gdy dla prawie wszystkich $x \in A \subset [a, b]$, $L_n(x) \leq Cw(n)$, $n = 1, 2, \dots$, gdzie $w(1) < w(2) < \dots$, to ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n)$ wynika zbieżność prawie wszędzie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Rezultat Kaczmara jest prezentowany w znakomitych monografiach o szeregach ortogonalnych: monografii Olewskiego [O75, str. 100 i nierówność (4) oraz Twierdzenie 1] oraz Kashina-Saakyana [KS84, Twierdzenie 4 z dowodem, strony 303-307].

4B3. 86 problem Banacha z Księgi Szkoockiej

Wiadomo, że istnieją układy ortogonalne zupełne w $L^\infty[0, 1]$, a niezupełne w $L^p[0, 1]$ dla każdego $1 \leq p < \infty$. Metodę budowania takich układów podali S. Banach i G. Fichtenholz. Wynika stąd, że istnieją układy ortogonalne, złożone z funkcji ograniczonych, nie dające się uzupełnić w $L^p[0, 1]$ funkcjami ograniczonymi. W związku z tym Banach postawił pytanie, czy istnieją układy ortogonalne i unormowane, wspólnie ograniczone prawie wszędzie, nie dające się uzupełnić w L^2 (lub w dowolnej L^p , funkcjami wspólnie ograniczonymi prawie wszędzie. Inaczej można też zapytać, tak jak brzmi 86 problem Banacha z Księgi Szkoockiej:

Czy jest możliwe z dowolnego niezupełnego układu ortogonalnego jednostajnie ograniczonych funkcji otrzymać układ zupełny przez dodanie pewnych jednostajnie ograniczonych funkcji?

W 1936 r. Kaczmarz pokazał, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna.

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie układem ortogonalnym, unormowanym, zupełnym w $L^1[0, 1]$ wspólnie ograniczonym np. układem trygonometrycznym. Weźmy dowolną funkcję $f \in L^2[0, 1] \setminus L^\infty[0, 1]$. Uporządkujmy $\{\varphi_n\}$ tak by współczynniki $a_n = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$ miały własność, że $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots$. Wtedy układ

$$g_n(x) = a_n \varphi_1(x) - a_1 \varphi_n(x)$$

jest wspólnie ograniczony, zupełny w $L^\infty[0, 1]$ i niezupełny w $L^2[0, 1]$. Jeżeli teraz zortogonalizujemy $\{g_n\}$ to otrzymamy układ ortogonalny, unormowany $\{\phi_n\}$, który jest zupełny w $L^\infty[0, 1]$, ale niezupełny w $L^2[0, 1]$. Oczywiście łatwo to uogólnić na dowolne $L^p[0, 1]$. Ponadto, tak samo można wykazać, że istnieje układ ortogonalny, unormowany, wspólnie ograniczony, zupełny w $L^p[0, 1]$, $p > 2$, nie dający się uzupełnić w $L^q[0, 1]$ dla $q < p$. Wystarczy obrać jako funkcję $f \in L^q \setminus L^p$. Modyfikując można to też pokazać dla $1 < p \leq 2$ (patrz Kaczmarz [26], str. 435-436).

4B4. Multiplikatory (1933, 1936, 1938)

Mając dany układ ortogonalny $\{\varphi_n\}$ i dwie klasy funkcji X, Y to ciąg liczbowy (λ_n) nazywamy multiplikatorem klasy (X, Y) , jeżeli dla dowolnej funkcji $f \in X$ istnieje funkcja $g \in Y$ taka, że

$$\int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx = \lambda_n \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Prace Kaczmarza z lat 1933, 1936 i 1938 poświęcone są badaniom multiplikatorów różnych typowych klas funkcyjnych, takich jak L^p , L^∞ , $C[a,b]$, $V[a,b]$. W [25] omawiana jest sprawa tzw. *osobliwości*, którą można tak scharakteryzować: dana jest pewna klasa funkcji X , pewna klasa M ciągów liczbowych i pewien układ ortogonalny (ϕ_n) . Czy istnieje funkcja w X , dla której ciąg współczynników (względem ϕ_n) nie należy do M (osobliwość typu Carlemana)? Czy istnieje w M ciąg, który nie jest ciągiem współczynników żadnej funkcji z X (osobliwość typu Hardy'ego-Littlewooda)?

4B5. 130 problem Kaczmarza z Księgi Szkockiej

Kaczmarz bywał w Kawiarni Szkockiej i wpisał nawet jeden problem do Księgi Szkockiej (problem 130):

Niech $\{f_n(t)\}$ będzie systemem jednostajnie ograniczonych, ortogonalnych i lakunarnych funkcji tzn. dla $p > 2$ istnieje stała $M_p > 0$ taka, że

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leq M_p \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{1/2}$$

Czy istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że dla dowolnego skończonego układu liczb c_1, c_2, \dots, c_n mamy

$$\max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \right| \geq \gamma \sum_{k=1}^n |c_k|?$$

Jest to więc pytanie, czy powyższy zbiór funkcji $\{f_n\}$ jest zbiorem Sidona. Przykładowo funkcje Rademachera tworzą zbiór Sidona.

4C. Całki typu Diniego

Najprostsza całka, znana z kryterium Diniego zbieżności szeregów Fouriera, to

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(t)|}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{|f(x+t)-f(t)|}{t} dt. \quad (1)$$

Pytanie dotyczy skończoności tej całki, gdy f jest funkcją ciągłą lub istnienia powyższej całki bez wartości bezwzględnej w liczniku. Plessner (1923) i Besicovitch (1923) wykazali, że całka taka istnieje prawie wszędzie. Z drugiej, strony Titchmarsh (1925) udowodnił, że całka

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)} dt \quad (2)$$

może być rozbieżna dla prawie wszystkich x , gdy $\frac{\varphi(t)}{t} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$.

Kaczmarz (1931) wykazał, że jeżeli φ jest dodatnią, ciągłą, rosnącą funkcją i całka $\int_0^1 \frac{t}{\varphi(t)} dt$ jest rozbieżna, to istnieje funkcja ciągła f o okresie 1, dla której całka (2) i całka

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)} dt \quad (3)$$

równa się ∞ dla wszystkich x . Zbiór takich funkcji jest II kategorii Baire'a w przestrzeni funkcji ciągłych.

Kaczmarz (1932) wykazał też, że jeżeli φ jest dodatnią, funkcją ciągłą rosnącą i $\frac{\varphi(t)}{t} \rightarrow 0$ gdy $t \rightarrow 0$, to istnieje funkcja ciągła f o okresie 1, dla której całka (2) jest rozbieżna dla wszystkich x . Zbiór takich funkcji jest II kategorii Baire'a w przestrzeni funkcji ciągłych.

W książce Bari ([B64], str. 66-68) podany został przykład konstrukcji Kaczmarza z 1931 roku funkcji ciągłej f takiej, że $\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)} \right| dt = +\infty$ dla każdej wartości x oraz dalej (na str. 73) kolejny przykład Kaczmarza o istnieniu funkcji, dla których w każdej punkcie x mamy

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)} \right| dt = +\infty$$

lub

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)} \right| dt = +\infty$$

i w żadnym punkcie powyższe całki bez wartości bezwzględnych nie istnieją.

4D. Problem Mazura-Ulama z Księgi Szkockiej nr 109

Kaczmarz-Turowicz (1939) podali rozwiązanie problemu Mazura-Ulama sformułowanego w 1938 r. Twierdzenie z tej pracy (patrz [O85, str. 162] i [GP78, str. 16]):

Dane są funkcje f_1, f_2, \dots, f_n rzeczywiste, całkowalne, skończone na $[a, b]$, gdzie $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$; gdy $b = \infty$, to rozważamy, zamiast przedziału domkniętego, odpowiedni przedział otwarty (lub otwarty z jednej strony). Tworzymy zbiór Z funkcji postaci

$$f(x) = R(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

gdzie n jest liczbą naturalną zależną od f , a $R = R_f = R(y_1, y_2, \dots, y_n)$ jest funkcją wymierną n zmiennych o współczynnikach rzeczywistych (należy to rozumieć tak, że funkcja f jest zdefiniowana dla wszystkich $x \in [a, b]$, dla których mianownik w $R(f_1, f_2, \dots, f_n)$ nie równa się zero). Wówczas dla każdego przedziału $[c, d]$, takiego że $a \leq c < d \leq b$, $-\infty < c, d < \infty$ istnieje taka funkcja f_0 skończona i całkowalna w $[c, d]$, należąca do Z , że

$$F(x) = \int_c^x f_0(t) dt$$

nie należy do Z .

Można by powiedzieć, że w pewnym sensie całki nieoznaczone pewnych funkcji z Z są niewymierne albo, że operacja wyszukiwania funkcji pierwotnych dla funkcji z bardzo naturalnej klasy wyprowadza zawsze poza tę klasę.

Rezultat był cytowany w znanej książce Ulama ([U60], str. 80).

4E. Odwzorowanie Kaczmarza (1933)

Odwzorowanie Kaczmarza między przestrzeniami Orlicza $K_{MN} : L^M \rightarrow L^N$ dane jest wzorem

$$K_{MN}(x) = N^{-1} [M(|x|)] \operatorname{sgn} x$$

jako uogólnienie odwzorowania Mazura $M_{p,q}: L^p \rightarrow L^q$ o wzorze $M_{p,q}(x) = |x|^{p/q} \operatorname{sgn} x$.

Kaczmarz udowodnił, że jeśli $M(2u) \leq CM(u)$ dla wszystkich $u > 0$, to odwzorowanie Kaczmarza $K_M: L^1 \rightarrow L^M$, gdzie

$$K_M(x) = M^{-1}[|x|] \operatorname{sgn} x$$

jest ciągłe z ciągłym odwzorowaniem odwrotnym $K_{M^{-1}}: L^M \rightarrow L^1$, danym wzorem

$$K_{M^{-1}}(y) = M[|y|] \operatorname{sgn} y,$$

a zatem przestrzeń Orlicza L^M jest homeomorficzna z L^1 .

Mazur wykazał w 1929 roku, że przestrzeń L^p jest homeomorficzna z przestrzenią L^1 i rezultat Kaczmarza uogólnił wynik Mazura dla L^p na ośrodkowe przestrzenie Orlicza L^M .

Odwzorowanie Mazura $M_{p,q}$ jest jednostajnym homeomorfizmem między sferami jednostkowymi takim, że $M_{p,q}^{-1} = M_{q,p}$ i $M_{p,q}$ jest odwzorowaniem Lipschitza na sferze jednostkowej gdy $p \geq q$ oraz $\frac{p}{q}$ - Höldera gdy $p \leq q$. Uogólnienie tych rezultatów na przestrzenie Orlicza badał w 2005 roku Delpech [D05], oczywiście dla odwzorowania Kaczmarza K_{MN} .

4F. Równania funkcyjne (1924)

W równaniach funkcyjnych Kaczmarz wykazał w 1924 r., że dla danej funkcji ϕ mierzalne rozwiązania równania funkcyjnego

$$f(x) + f(x+y) = \phi(y) f(x+y/2) \quad (4)$$

określone na $(-\infty, +\infty)$ są ciągłe, oraz są liniowymi kombinacjami funkcji

$\cos kx$, $\sin kx$, $\cosh kx$, $\sinh kx$, gdzie liczba k zależy od ϕ .

Najpierw Kaczmarz zauważył, że równoważnym równaniem do (4) jest równanie

$$f(x+y) + f(x-y) = \phi(2y) f(x). \quad (5)$$

Ważna obserwacja Kaczmarza tutaj to fakt, że mierzalne rozwiązanie tego równania musi być ciągłe ([2], str. 125).

Następnie Kaczmarz, przy pomocy aparatu funkcji rzeczywistych, stwierdził, że rozwiązanie spełnia równość

$$f''(x) = kf(x), \quad k = 2\phi''(0)f(x),$$

(6)

a zatem ogólne rozwiązania tego równania to

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{k}x) + C_2 \sin(\sqrt{k}x) \quad \text{dla } k > 0$$

lub

$$f(x) = C_1 \cosh(\sqrt{|k|}x) + C_2 \sinh(\sqrt{|k|}x)$$

lub

$$f(x) = C_1 + C_2 x \quad \text{dla } k = 2f''(0) = 0.$$

W szczególności, ogólnym rozwiązaniem równania

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y$$

jest $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Aczel podał w [A56] prosty dowód tego ostatniego przypadku.

4G. N-zbieżność (1928)

S. Kaczmarz and L. Nikliborc w 1928 roku badali N -zbieżność. Niech $N : R \rightarrow R$ będzie N -funkcją tzn. funkcją ciągłą, $N(0) = 0$, $N(u) > 0$ dla $|u| > 0$ i istnieją stałe $a > 0$, $b > 0$ takie, że dla $|u| > a$ mamy $N(u) > b$.

Nazwa *funkcja (N)* lub *N-funkcja* pojawiła się tutaj, ponieważ pierwszym, który wprowadził tę zbieżność i ją badał był Paul Noaillon.

Ciąg funkcji (f_n) jest N -zbieżny lub *zbieżny w sensie Noaillona* do f na $[0, 1]$, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[f_n(x) - f(x)] dx = 0$$

Kaczmarz-Nikliborc udowodnili, że jeśli

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[f_m(x) - f_n(x)] dx = 0,$$

to istnieje funkcja f na $[0, 1]$ taka, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[f(x) - f_n(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[f_n(x) - f(x)] dx = 0.$$

Ponadto, gdy N spełnia dodatkowo $N(u + v) \leq C [N(u) + N(v)]$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich $u, v \in R$, to również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 N[f_n(x)] dx = \int_0^1 N[f(x)] dx.$$

Funkcje z takim dodatkowym założeniem nazwane zostały N_1 -funkcjami. To ostatnie twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia F. Riesz, znanego dla przestrzeni L^p z $p \geq 1$, którego zresztą oni nie znali.

Przypomnijmy, że praca Birnbauma-Orlicza [BO31], badająca też taką zbieżność, ukazała się w 1931 roku, a praca Orlicza z jego przestrzeniami i N -zbieżnością w 1932 roku. Byli więc oni blisko odkrycia przestrzeni Orlicza, ale takowe pojawiły się po raz pierwszy dopiero w pracy Orlicza z 1932 roku. W pracy Birnbauma-Orlicza nie ma przestrzeni. Zatem przestrzenie Orlicza to przestrzenie Orlicza, a NIE Birnbauma-Orlicza, jak niektórzy próbują zaanonsować bez solidnego przebadania prac.

4H. Aksjomatyka liczb naturalnych u Kaczmarza

Erhard Schmidt podał charakteryzację liczb naturalnych w swoich wykładach w 1920 roku, ale nigdy nie opublikował, o czym pisze Rohrbach w [R51]. Kaczmarz, zupełnie niezależnie, podał w 1932 r. prawie tę samą aksjomatykę. Schmidt zdefiniował zbiór liczb naturalnych jako niepusty uporządkowany zbiór \mathcal{N} taki, że

1. Każdy niepusty podzbiór \mathcal{N} ma element pierwszy.
2. Każdy element \mathcal{N} z wyjątkiem pierwszego ma bezpośredni poprzednik w \mathcal{N} .
3. Zbiór \mathcal{N} nie ma elementu ostatniego.

Rohrbach [R51] wykazał, że ta definicja jest równoważna z aksjomatami Dedekinda-

-Peano. Wspomnijmy, że Ludvig Nider [N31] podał w 1931 roku zbiór niezależnych aksjomatów dających liczby naturalne. Jego zbiór upraszcza konstrukcję Peano i pierwotnymi pojęciami są liczba, równość i relacja mniejszości $<$. Podobnie Kaczmarz [16] w 1932 roku podał te aksjomaty w postaci zawierającej tylko relację $<$. Kaczmarz poprawił konstrukcję Boehma liczb naturalnych z 1911 roku, którego zbiór aksjomatów nie był wystarczający dla charakteryzacji tych liczb. Kaczmarz udowodnił też niezależność tych aksjomatów. Niestety ta prosta aksjomatyzacja liczb naturalnych nie jest znana szerszemu ogółowi.

4I. Inne rezultaty Kaczmarza

Wybranych zostało luźno kilka rezultatów, o których nie było mowy dotychczas. Kilka nierówności Kaczmarza, jeden rezultat z transformacji całkowych, pewien z teorii szeregów w przestrzeniach Banacha i kończy to wynik z geometrii.

Mamy więc *nierówność Kaczmarza* z [13]: dla $f \in L^p[0, 1]$ z $1 < p \leq \infty$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \frac{3p-2}{2p-2} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x) \right|^p dx \right),$$

gdzie r_n są funkcjami Rademachera (porównaj Sikorski [S59], str. 142).

Nierówności Kaczmarza-Steinhausa ([KS], str. 287-288): Jeżeli $2 < p < \infty$ to istnieje stała $C = C(p)$ taka, że zachodzi nierówność

$$|1+x|^p \leq 1+px + \sum_{k=2}^{[p]} \binom{p}{k} x^k + C|x|^p \quad (7)$$

dla wszystkich $x \in R$. Konsekwencją tej nierówności liczbowej jest następujące oszacowanie całek: Jeżeli $2 < p < \infty$ i $f, g \in L^p[a, b]$ to istnieją stałe C, D zależne tylko od p takie, że zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx &\leq \int_a^b |f(x)|^p dx + p \int_a^b |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) dx \\ &+ C \int_a^b |g(x)|^p dx + D \sum_{k=2}^{[p]} \int_a^b |f(x)|^{p-1} |g(x)|^k dx. \end{aligned}$$

Nierówności te są cytowane pod taką właśnie nazwą w książkach [MPF], str. 66 i [B98], str. 144.

W 1933 r. Watson [W33] wykazał następujące twierdzenie o transformacjach całkowych: Niech funkcja $k : R_+ \rightarrow R_+$ spełnia równość

$$\int_0^{\infty} \frac{k(xy)k(zy)}{y^2} dy = \min(x, z) \quad \text{dla wszystkich } x, z > 0. \quad (8)$$

Warunek ten jest konieczny i dostateczny by dla dowolnej $f \in L^2(R_+)$ istniała $g \in L^2(R_+)$ taka, że mamy równości prawie wszędzie

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k(xy)}{y} f(y) dy \quad \text{i} \quad f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{k(xy)}{y} g(y) dy.$$

W tym samym roku Kaczmarz [19] uogólnił twierdzenie Watsona na parę funkcji k i h , znajdując trzy warunki, na te funkcje w miejsce jednego (8), by zachodziło podobne twierdzenie o transformacjach całkowych.

Kaczmarz [14] wykazał następujące rezultaty dla ciągów o wartościach w przestrzeniach Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$:

A. Jeżeli średnie arytmetyczne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ są ograniczone dla dowolnego monotonicznego ciągu liczbowego $\{\lambda_n\}$ zbieżnego do 0, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest absolutnie ograniczony.

B. Jeżeli średnie arytmetyczne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ są ograniczone dla dowolnego wypukłego ciągu liczbowego $\{\lambda_n\}$ zbieżnego do 0, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest ograniczony.

Przypomnijmy, że ciąg liczbowy $\{\lambda_n\}$ jest wypukły, gdy

$$\Delta^2 \lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n+2} - 2\lambda_{n+1} \geq 0.$$

Wyniki Kaczmarza uogólniają rezultat S. Szidona z 1921 r. udowodniony dla szeregów liczbowych rzeczywistych bądź zespolonych. Rezultaty Kaczmarza były też z kolei uogólniane przez Orlicza [O36] na k -monotoniczne malejące ciągi $\{\lambda_n\}$, tzn. ciągi spełniające $\Delta^i \lambda_n \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, k$ i wszystkich $n \in N$ oraz przez Turana [T47] na ciągi monotoniczne rzędu k tzn. spełniające $(-1)^i \Delta^i \lambda_n \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, k$ i wszystkich $n \in N$. Wszystkie te rezultaty, włączając w to wynik Kaczmarza, były użyteczne w dowodach sumowalności szeregów ortogonalnych.

W 1920 roku Kurt Reidemeister i w 1933 roku Kaczmarz (dowód nie został opublikowany) udowodnili twierdzenie dotyczące stałej szerokości zbioru. Zbiór ma stałą szerokość, jeżeli odległość każdych dwóch podpierających równoległych jest stała.

Twierdzenie (Reidemeister-Kaczmarz). *Zbiór wypukły i domknięty ma stałą szerokość, wtedy i tylko wtedy, gdy dodanie do niego punktu nie zwiększa jego średnicy.*

W 1933 roku Marek Kac [K33] podał prosty dowód tego twierdzenia.

4J. Kaczmarz i historia matematyki

Kaczmarz interesował się historią matematyki i zbierał materiały z Jadwigą Dianni (1886-1981). Miał nawet na UJK kurs *Zarys historii matematyki*.

Po otrzymaniu korekty artykułu o Kaczmarzu 29 marca 1965 roku Orlicz napisał do Redakcji Polskiego Słownika Biograficznego:

Skreślono moją uwagę, że Kaczmarz był autorem prac z zakresu matematyki teoretycznej i stosowanej. Kto zna historię matematyki okresu międzywojennego u nas, wie, że tylko kilku matematyków uprawiało w tym czasie „zastosowania” i, że należał się specjalne wyrazy uznania matematykom, którzy już wówczas widzieli potrzebę badań nie tylko teoretycznych. Redakcja dołożyła natomiast kompletnie nieistotną wzmiankę, że Stefan Kaczmarz zamierzał prowadzić wykłady z historii matematyki. Po co to? Czy inne jego zamiary np. jego i moje prace wstępne nad książką matematyczną dla szkół wojskowych należało też odnotować?

5. Inni o Stefanie Kaczmarzu

Kilka osób, zwykle znanych matematyków, pisało o Stefanie Kaczmarzu. Możemy zatem przeczytać:

1. Stanisław Ulam [U96], str. 58:

Kaczmarz, wysoki i chudy (zginął jako żołnierz, w 1940 roku) i Nikliborc, niski i okrągły, organizowali ćwiczenia do wielkich wykładów z rachunku różniczkowego i równań różniczkowych. Często widywano ich razem, przypominali mi Pata i Pataszona, bohaterów ówczesnych filmów komediowych.

2. Kazimierz Szałajko [S90], str. 119:

Sądzę, że pod wpływem prof. Łomnickiego doc. Kaczmarz zajął się zastosowaniami matematyki do badania krzywizny torów kolejowych. Posługiwał się on, jak i asystenci jedyną w katedrze ręczną maszynką do liczenia – „Brunsviga”.

- i w Wiadom. Math. [S94], str. 263:

Niedługo przed wybuchem wojny Stefan Kaczmarz zaproponował mi współpracę w rozwiązaniu teoretycznym i praktycznym zagadnienia związanego z krzywizną torów kolejowych. Być może, ale to jest tylko moje przypuszczenie, impulsem do tego tematu było wykolejenie się pod Lwowem pociągu pośpiesznego na jakimś zbyt ostrym łuku. Do wspomnianego tematu włożyliśmy już dość dużo pracy, ale wybuchła wojna i Kaczmarz poszedł na front, z którego nie wrócił.

3. Władysław Orlicz [O64], str. 389 i [O85], str. 156:

Z tych czasów wspominam Stefana jako spokojnego, zrównoważonego kolegę, z którym współpraca układała się doskonale. Był człowiekiem skromnym i raczej z umiarkowanymi ambicjami naukowymi. Oczywiście prowadziliśmy dyskusje naukowe i trochę wspólnie studiowaliśmy bieżącą literaturę, lecz w latach trzydziestych ja z zapałem zwróciłem się ku analizie funkcjonalnej i teorii sumowalności, podczas gdy On, mając już interesujące wyniki w teorii szeregów ortogonalnych, dalej pracował w tej dziedzinie.



27. Stefan Kaczmarz – zdjęcie legitymacyjne

4. Władysław Orlicz [O80], str. 282:

Prof. Łomnicki starał się zawsze o pozyskanie dla lwowskiego środowiska matematycznego wybitnych matematyków. Np. Stefan Banach rozpoczął swą karierę we Lwowie od asystentury u Łomnickiego. W Katedrze Łomnickiego znalazło się też miejsce dla Stefana

Kaczmarza, następnie dla jednego z czołowych przedstawicieli Szkoły Banacha, Stanisława Mazura.

i dalej o swoim koledze Kaczmarzu:

Razem ze Stefanem Kaczmarzem prowadziliśmy ćwiczenia do tego wykładu (wykład matematyki stosowanej A. Łomnickiego). To było jednym z powodów, że razem z Kaczmarzem zaczęliśmy się interesować matematyką stosowaną. Obaj byliśmy też zdania, że skoro pracujemy na Politechnice, a koledzy różnych specjalności technicznych potrzebują pomocy matematyków, to trzeba się wciągnąć w nową problematykę, nie rezygnując oczywiście z badań podstawowych, którymi zajmowaliśmy się dotychczas.

5. Władysław Orlicz [O85], str. 156:

Od roku 1930 do 1937 byłem zatrudniony w Katedrze prof. Łomnickiego i wspólnie ze Stefanem Kaczmarzem urzędowaliśmy w jednym pokoju i przy tym samym biurku. Obaj prowadziliśmy rozmaite zajęcia dydaktyczne związane z zadaniami dydaktycznymi Katedry. Do głównych naszych obowiązków należało przede wszystkim prowadzenie ćwiczeń do wykładów Profesora oraz wspólne przeprowadzenie, wielokrotnie w ciągu roku, egzaminów pisemnych. Były one obowiązkową pierwszą częścią egzaminu z matematyki na pierwszym i drugim roku studiów na Wydziale Mechanicznym. Zaliczenie egzaminu pisemnego było warunkiem dopuszczenia do egzaminu ustnego u prof. Łomnickiego. Wspólnie ze Stefanem Kaczmarzem przygotowywaliśmy tematy egzaminacyjne; w czasie egzaminu, który odbywał się zbiorowo w dużej, amfiteatralnej sali, wspólnie kontrolowaliśmy jego przebieg, prowadząc ze zmiennym szczęściem utarczki z plagą odpisywania.

UWAGA 4. W listopadzie 1939 roku Orlicz został zaangażowany na Politechnice, gdzie objął adiunkturę po nieobecnym Stefanie Kaczmarzu.

Sprawdzenie Stefana Kaczmarza w internecie (Google) dało następujące ilości pojawienia się słów: Stefan Kaczmarz – 680 razy, Kaczmarz theorem – 904 razy, Kaczmarz algorithm – 11 600 razy, Kaczmarz method – 13 000 razy i Kaczmarz system – 16 100 razy.

Podziękowania

Pragnę podziękować Pani Krystynie Dziedzic z Dzierżoniowa, córce Stefana Kaczmarza za informacje o swoim ojcu. Chciałbym też gorąco podziękować wnuczce Stefana Kaczmarza Pani Magdalenie Kielan z Wrocławia za zdjęcia Kaczmarza, jak i za informacje o rodzinie Kaczmarza oraz za obecność na moim odczycie w dniu 23 maja 2006 roku. Ponadto należą się słowa podziękowania Panu Andrzejowi Czesławowi Żakowi z Centralnego Archiwum Wojskowego w Rembertowie za przesłanie kopii życiorysu, ręcznie pisanego przez Kaczmarza, z 1920 roku oraz jego karty ewidencyjnej. Panu Jerzemu Izdebskiemu dziękuję za informacje o Stefanie Kaczmarzu tzn. o innej osobie od naszego Stefana Kaczmarza oraz Panu Sławomirowi Kalbarczykowi z IPN dziękuję za list odwołujący jego stwierdzenia w swojej książce z 2001 roku o śmierci Kaczmarza w Katyniu. Dziękuję też Pani Profesor Danucie Przeworskiej-Rolewicz za przesłanie mi kopii listów Parksa i za komentarze dotyczące śmierci Kaczmarza oraz za wyrażenie zgody na ich umieszczenie w tej pracy.

Skanowane zdjęcia lub dokumenty o numerach 1-8, 12, 14, 18-19, 21-26 pochodzą z prywatnych zbiorów Pani Magdaleny Kielan, a z numerami 13, 15 ze zbiorów Archiwum IMPAN w Sopocie.

6. Spis książek i prac naukowych Kaczmarza

1. *⁴ *O związkach między pewnymi równaniami funkcyjnymi i różniczkowymi*, Uniwersytet Jana Kazimierza, Lwów 1924 (praca doktorska).
2. *Sur l'équation fonctionnelle $f(x) + f(x + y) = \varphi(y) f(x + \frac{y}{2})$* , Fund. Math. 6 (1924), 122-129.
3. *Über die Konvergenz der Reihen von Orthogonalfunktionen*, Math. Zeit. 23 (1925), 263-270.
4. *Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen*, Math. Ann. 96 (1926), 148-151.
5. *Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen*, Math. Zeit. 26 (1927), 99-105.
6. *Warunki zbieżności szeregów ortogonalnych*, (w: Księga Pamiątkowa Pierwszego Zjazdu Matematyków (Lwów, 7-10 IX 1927), Fundusz Kultury Narodowej, Kraków 1929), 91-92.
7. (wspólna z L. Nikliborcem), *Sur les suites de fonctions convergentes en moyenne*, Fund. Math. 11 (1928), 151-168.
8. *Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux*, Studia Math. 1 (1929), 87-121.
9. *O zbieżności i sumowalności rozwinięć ortogonalnych*, Lwów 1929, 1-16 (praca habilitacyjna, nakładem autora).
10. *Über eine Anwendung der Funktionalen an die Orthogonalreihen*, Atti del Congresso Intern. del Matematici (Bologna, 3-10 Sept. 1928), Bologna 1930, T. 3, 189-191.
11. *Über ein Orthogonalsystem*, (w: Sprawozdania I Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich (Warszawa, 23-27 września 1929), Warszawa 1930, 189-192.
12. *Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihen*, Studia Math. 2 (1930), 91-96.
13. (wspólna z H. Steinhauserem), *Le système orthogonal de M. Rademacher*, Studia Math. 2 (1930), 231-247; (przedruk w: *Hugo Steinhaus, Selected Papers*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1985), 452-466.
14. *Une remarque sur les séries*, Studia Math. 3 (1931), 95-100.
15. *Integrale vom Dinischen Typus*, Studia Math. 3 (1931), 189-199.
16. *Axioms for arithmetic*, J. London Math. Soc. 7 (1932), 179-182.
17. *The divergence of certain integrals*, J. London Math. Soc. 7 (1932), 218-222.
18. *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Math. 4 (1933), 21-26.
19. *Note on general transforms*, Studia Math. 4 (1933), 146-151.
20. *The homeomorphy of certain spaces*, Bulletin Acad. Polonaise 1933, 145-148.
21. *On some classes of Fourier series*, J. London Math. Soc. 8 (1933), 39-45.
22. *Notes on orthogonal series. I.*, Studia Math. 5 (1934), 24-28.
23. *Notes on orthogonal series. II.*, Studia Math. 5 (1934), 103-106.
24. S. Kaczmarz i H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen, Monografie Matematyczne VI*, Warszawa-Lwów 1935, vi + 298 str.; pdf file można znaleźć w internecie pod adresem: <http://matwbn.icm.edu.pl/kstresc.php?tom=6&wyd=10&szjez=>
25. *Notes on orthogonal series. III.*, Studia Math. 6 (1936), 112-116.
26. *O zupełności układów ortogonalnych*, Archiwum Towarzystwa Naukowego we Lwowie, Dział III, t. VIII, zeszyt 5, 1936, 431-436.
27. *On the orthogonal series*, C. R. de Congress Internat. des Math. (Oslo 1936), T. 2, Oslo 1937, 117-118.
28. *Przybliżone rozwiązywanie układów równań liniowych – Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen*, Bull. Intern. Acad. Polonaise Sci. Lett., Cl. Sci. Math. Nat. A. 1937, 355-357; ang. tłum. *Approximate solution of systems of linear equations*, Internat. J. Control 57 (1993), no. 6, 1269-1271.
29. (wspólna z J. Marcinkiewiczem) *Sur les multiplicateurs des séries orthogonales*, Studia Math. 7 (1937), 73-81; przedruk w: *Józef Marcinkiewicz, Collected Papers*, PWN, Warszawa 1964, 389-396.
30. *Nowy typ krzywizny drogowej*, Wiadomości Drogowe 12 (1938), nr 136-137, 389-400.
31. *O działaniach skróconych*, Mathesis Polska 11 (1938), 49-54.
32. Recenzja książki *Bolesław Konorski, Nomografia, Towarzystwo Kursów Technicznych*, Warszawa 1937, w: *Matematyka i Szkoła* 2 (1938), 158-160.
33. (wspólna z A. Turowiczem), *Sur l'irrationalité des intégrales indéfinies*, Studia Math. 8 (1939), 129-134.

⁴ Gwiazdka * oznacza, że nie widziałem tej lub innych prac osobiście ale wiem o nich z innych źródeł.

34. S. Kaczmarz i H. Steinhaus *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tom 6, Chelsea Publishing, New York 1951, viii + 296 str.; Drugie wydanie książki [24] (poprawiony reprint pierwszego wydania książki z 1935) (po niemiecku).
35. S. Kačmaž z i G. Šteingauz, *Teoriya Ortogonal'nykh Ryadov* [Theoria Szeregów Ortogonalnych], Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow 1958, 507 str., tłum. na rosyjski książki [24] z 50% uzupełnieniem materiału napisanego przez R. S. Gutera i P. L. Uljanowa; N. Ya. Vilenkin, *Supplement to „Theory of Orthogonal Series”*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 17(1961), 219-250: rosyjski artykuł pojawił się jako supplement do rosyjskiego tłumaczenia książki *Theory of Orthogonal Series*, S. Kaczmarza i H. Steinhausa.

Ponadto Kaczmarz wygłosił następujące odczyty na Posiedzeniach Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Oddział we Lwowie:

1. *Über Ergänzung des Rademacherschen Orthogonalsystems zu einem vollständigen Orthogonalsystem*, Annales Soc. Polonaise 9 (1931), 190.
2. *Zur Theorie der doppelten Fourierreihen*, Annales Soc. Polonaise 9 (1931), 195-196.
3. (wspólnie z S. Banachem i H. Steinhauserem), *Bemerkungen zu gewissen Sätzen des Herrn Zygmund über Fouriersche und Rademachersche Reihen*, Annales Soc. Polonaise 9 (1931), 198.
4. *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der unendlichen Reihen*, Annales Soc. Polonaise 10 (1932), 122-123.
5. *Über die Dinischen Integrale*, Annales Soc. Polonaise 10 (1932), 124.
6. *Effektives Beispiel für Dinische Integrale*, Annales Soc. Polonaise 10 (1932), 125-126.
7. *Über ein Problem des Herrn S. Mazurkiewicz*, Annales Soc. Polonaise 10 (1932), 126.
8. *Über die Räume der mit einer Funktion M integrierbaren Funktionen*, Annales Soc. Polonaise 10 (1932), 129.
9. *Bericht über eine Studienreise nach England*, Annales Soc. Polonaise 12 (1934), 115.
10. *Über eine Klasse von Fourierschen Reihen*, Annales Soc. Polonaise 12 (1934), 116.
11. *Über die Multiplikatoren*, Annales Soc. Polonaise 12 (1934), 117.
12. *Über Kurven konstanter Breite*, Annales Soc. Polonaise 12 (1934), 117.
13. *Zur Theorie der Orthogonalreihen*, Annales Soc. Polonaise 13 (1935), 144.
14. *Sur une équation intégrale*, Annales Soc. Polonaise 16 (1937), 199.
15. *Application des courbes sinusoidales à la construction des routes*, Annales Soc. Polonaise 17 (1938), 109.
16. (wspólnie z A. Turowiczem), *Sur les intégrales indéfinies irrationnelles*, Annales Soc. Polonaise 17 (1938), 111-112.

7. Informacje o S. Kaczmarzu i recenzje jego książki

- [B34] A. Buhl, Recenzja książki *Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, „Theorie der Orthogonalreihen”, Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935, vi + 298 str.*, L'Enseignement Math. 34 (1934), 397-398.
- [D05] S. Domoradzki, *Powstanie i rozwój metody kategorii Baire'a w pracach polskich matematyków opublikowanych w „Studia Mathematica” w okresie międzywojennym*, Voprosy Istor. Estestvozn. i Tekhn. 2005, nr 3, 39-46 (po rosyjsku); na stronie 45 opisany Stefan Kaczmarz.
- [D04] R. Duda, Recenzja książki S. Kalbarczyk, *Polscy pracownicy nauki, ofiary zbrodni sowieckich w latach II wojny światowej, Zamordowani, więzieni, deportowani*, Wydawnictwo Neriton, Warszawa 2001, 296 str., (w: Wiadom. Mat. 40 (2004), 282-285).
- [G90] S. Gottwald, *Stefan Marian Kaczmarz*, w: Lexikon bedeutender Mathematiker, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 1990, 237.
- [H34] A. Hammerstein, Recenzja książki *Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, „Theorie der Orthogonalreihen”, Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935, vi + 298 str.*, Jahrbuch f. Math. - JFM 61.1119.05.
- [KH05] H. Kaczmarz, *List Heleny Kaczmarzowej do Władysława Orlicza dotyczący męża Stefana Kaczmarza*, Wrocław 18 X 1964, 1 strona.
- [KS87] *Stefan Kaczmarz*, w: A. I. Borodin and A. S. Bugai, *Eminent Mathematicians*, Kiev 1987, 323 (po rosyjsku).

- [SK01] *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, w: *Poczet Wielkich Matematyków*, Włodzimierz Kryszczyński (red.), Wyd. Kleks, Bielsko-Biała 2001, 172-174.
- [K01] S. Kalbarczyk, *Polscy pracownicy nauki, ofiary zbrodni sowieckich w latach II wojny światowej*, Wydawnictwo NERITON, Warszawa 2001, 295 str.
- [SK05] S. Kalbarczyk, *List Sławomira Kalbarczyka do Lecha Maligrandy dotyczący śmierci Stefana Kaczmarza w jego książce*, Warszawa 6 IV 2006, 1 strona.
- [K06] M. Kielan, *Trzy listy Magdaleny Kielan do Lecha Maligrandy z materiałami o Stefanie Kaczmarzu*, Wrocław 23 I 2006 i 8 III 2006.
- [K99] S. Kolankowski, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, Materiały dotyczące Słownika Biograficznego Matematyków Polskich, Instytut Matematyczny PAN, Preprint C-4, Instytut Mat. PAN, Warszawa 1996, 34-35.
- [KPB03] S. Kolankowski i Z. Pawlikowska-Brożek, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, (w: Słownik Biograficzny Matematyków Polskich, Red. S. Domaradzki, Z. Pawlikowska-Brożek, D. Węglowska, Tarnobrzeg 2003), 94-95.
- [L] G. G. Lorentz, Recenzja książki *Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, „Theorie der Orthogonalreihen”*, Chelsea, New York 1951, viii + 296 str., Math. Reviews MR0094635 (20 #1148).
- [LM05] L. Maligranda, *List Lecha Maligrandy do pani Prof. Danuty Przeworskiej-Rolewicz dotyczący śmierci Stefana Kaczmarza*, Lulea 27 XI 2005, 2 strony.
- [N35] J. Neyman, *List Neymana do Kaczmarza*, Londyn 1 I 1935, 2 strony.
- [OS] Z. S. Olesiak i G. A. Sułym, *Władysław Michał Nikliborc (1899-1948)*, *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 46 (2001), nr 3, 113-124.
- [O47] B. Olszewicz, *Lista strat kultury polskiej (1 IX 1939-1 III 1946)*, Wydawnictwo S. Arcta, Warszawa 1947.
- [O64] W. Orlicz, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, *Polski Słownik Biograficzny*, Wrocław-Warszawa-Kraków 1964-1965, T. 11, 387.
- [O80] W. Orlicz, *Przemówienie wygłoszone przy nadaniu doktoratu honorowego Politechniki Poznańskiej*, *Wiadom. Mat.* 22 (1980), 279-284.
- [O81] W. Orlicz, *Lwowska Szkoła Matematyczna w okresie międzywojennym*, *Wiadom. Mat.* 23 (1981), 222-231.
- [O85] W. Orlicz, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, *Wiadom. Mat.* 26 (1985), no. 2, 155-164; ang. wersja w: Władysław Orlicz, *Collected Papers*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw 1988, Part II, 1679-1688.
- [P93] P. C. Parks, *Stefan Kaczmarz (1895-1939)*, *Internat. J. Control* 57 (1993), no. 6, 1263-1267.
- [P92] Z. Popławski, *Dzieje Politechniki Lwowskiej 1844-1945*, Wrocław 1992.
- [PR93] D. Przeworska-Rolewicz, *Remarks on the article of W. Orlicz: „Stefan Kaczmarz (1895-1939)”*, *Wiadom. Mat.* 26 (1985), no. 2, 155-164, *Wiadom. Mat.* 30 (1993), no. 1, 131.
- [PR05] D. Przeworska-Rolewicz, *List Danuty Przeworskiej-Rolewicz do Lecha Maligrandy dotyczący śmierci Stefana Kaczmarza*, Warszawa 8 XII 2005, 4 strony.
- [SR89] J. Snitko-Rzeszut, *Stefan Marian Kaczmarz*, *Wojskowy Przegląd Historyczny* 34 (1989), nr 4, 289.
- [S90] K. Szałajko, *Antoni Łomnicki (1881-1941)*, w: *„Matematyka Przełomu XIX i XX wieku”*, Materiały z IV Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki pod red. Stanisława Fudalego, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 1990, 113-122.
- [S93] K. Szałajko, *Wspomnienia o Stefanie Banachu na tle Lwowa i Lwowskiej Szkoły Matematycznej*, *Opuscula Math.* 13 (1993), 45-54.
- [S94] K. Szałajko, *Wspomnienia lwowskie*, *Wiadom. Mat.* 30 (1994), 251-263.
- [S35] G. Szegő, Recenzja książki *Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, „Theorie der Orthogonalreihen”*, *Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935*, vi + 298 str., *Zentralblatt Math.* 0013.00902, 1935.
- [Sz93] R. Szewalski, *Wydział Mechaniczny (w: Politechnika Lwowska 1844-1945)*, Wydaw. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1993, 296-405.
- [T91] J. Tucholski, *Mord w Katyniu. Kozielsk, Ostaszków, Starobielsk. Lista ofiar*, PAX, Warszawa 1991, 987 str.
- [W78] M. Walczak, *Stefan Kaczmarz (w: Szkolnictwo wyższe i nauka polska w latach wojny i okupacji 1939-1945, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław 1978)*, 231.
- [Z35] A. Zygmund, Recenzja książki *Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, „Theorie der Orthogonalreihen”*, *Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935*, vi + 298 str., *Wiadom. Mat.* 42 (1935), 145-153.

8. Cytowane książki i artykuły innych

- [A56] J. Aczel, *Some general methods in the theory of functional equations of one variable. New applications of functional equations*, Uspekhi Mat. Nauk 11 (1956), no. 3, 3-68 (po rosyjsku).
- [AR94] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version*, Seventh Edition, Wiley, New York 1994.
- [A95] E. Aved'yan, *Learning Systems*, Springer-Verlag, London 1995, xiii+ 121 str.
- [B84] V. N. Babenko, *Convergence of the Kaczmarz projection algorithm*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 24(1984), no. 10, 1571-1573 (po rosyjsku).
- [BR70] L. A. Balašov and A. I. Rubinštein, *Series in the Walsh system, and their generalizations*, Itogi Nauki, Ser. Mat., Mat. Analiz, 1970, Akad. Nauk SSSR Vsesojuz. Inst. Naučn. i Tehn. Informacii, Moscow 1971, 147-202 (po rosyjsku).
- [B64] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, Oxford 1964.
- [B05] M. Benzi, *Gianfranco Cimmino's contributions to numerical mathematics*, Atti del Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell'Universita di Bologna, Volume Speciale: Ciclo di Conferenze in Memoria di Gianfranco Cimmino, Marzo-Aprile 2004, TecnoPrint, Bologna 2005, 87-109 (manuskrypt 2004, 17 stron).
- [BO31] Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. 3 (1931), 1-67; (przedruk w: Władysław Orlicz, Collected Papers, Part I, PWN, Warszawa 1988), 133-199.
- [B98] P. S. Bullen, *A Dictionary of Inequalities*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 97, Longman, Harlow 1998.
- [CEG] Y. Censor, P. P. B. Eggermont and D. Gordon, *Strong underrelaxation in Kaczmarz's method for inconsistent systems*, Numer. Math. 41 (1983), 83-92.
- [D05] S. Delpéch, *Modulus of continuity of the Mazur map between unit balls of Orlicz spaces and approximation by Hölder mappings*, Illinois J. Math. 49 (2005), no. 1, 195-216.
- [GES] B. I. Golubov, A. V. Efimov and V. A. Skvortsov, *Walsh Series and Transforms. Theory and Applications*, Nauka, Moskva 1987 (po rosyjsku).
- [GBH7]* R. Gordon, R. Bender and G. T. Herman, *Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography*, Journal of Theoretical Biology 29 (1970), 471-481.
- [GP78] H. Górecki i A. Pelczar, *O działalności naukowej Profesora Andrzeja Turowicza*, Wiadom. Mat. 21 (1978), 14-24.
- [HS05] R. Haller i R. Swarcz, *Kaczmarz algorithm in Hilbert space*, Studia Math. 169 (2005), No. 2, 123-132.
- [HN] M. Hanke and W. Niethammer, *On the acceleration of Kaczmarz's method for inconsistent linear systems*, Linear Algebra Appl. 130 (1990), 83-98.
- [HN90] M. Hanke and W. Niethammer, *On the use of small relaxation parameters in Kaczmarz's method*, Z. Angew. Math. Mech. 70 (1990), No. 6, 575-576.
- [Iz00] J. Izdebski, *Dzieje 9 Dywizji Piechoty 1918-1939*, Wydawnictwo NERITON, Warszawa 2000.
- [K33] M. Kac, *O pewnej własności charakterystycznej zbiorów o stałej Szerokości*, Mathesis Polska 8 (1933), 110-111.
- [Ka92] R. Kałuża, *Stefan Banach*, Wydawnictwo GZ, Warszawa 1992, 167 str.; ang. tłum. R. Kałuża, *The life of Stefan Banach, Through a reporter's eyes*, Birkhäuser, Boston 1996, 147 str.
- [KS84] B. S. Kashin i A. A. Saakyan, *Ortogonal'nye Ryady* [Szeregi Ortogonalne], Nauka, Moscow 1984 (po rosyjsku).
- [K81] K. Kuratowski, *Notatki do Autobiografii*, Czytelnik, Warszawa 1981.
- [KM01] S. Kwapien i J. Mycielski, *On the Kaczmarz algorithm of approximation in infinite-dimensional spaces*, Studia Math. 148 (2001), 75-86.
- [M03] L. Maligranda, *Władysław Orlicz – w setną rocznicę urodzin*, Matematyka 4 (2003), 196-202.
- [Ma85] E. Marczewski, *Hugo Steinhaus, w: Hugo Steinhaus, Selected Papers*, PWN, Warszawa 1985, 11-24.
- [M81] R. D. Mauldin, *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston 1981.
- [M77] S. F. McCormick, *The methods of Kaczmarz and row orthogonalization for solving linear equations and least squares problems in Hilbert space*, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), no. 6, 1137-1150.
- [MPF] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer, Dordrecht 1993.

- [N31] L. Neder, *Über den Aufbau der Arithmetik*, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 40 (1931), 22-37.
- [O75] A. M. Olevskii, *Fourier Series with Respect to General Orthogonal Systems*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg 1975.
- [O36] W. Orlicz, *Über k -fach monotone Folgen*, Studia Math. 6 (1936), 149-159; (przedruk w: *Władysław Orlicz, Collected Papers, Part I*, PWN, Warszawa 1988, 392-402).
- [R21] K. Reidemeister, *Über Körper konstanten Durchmessers*, Math. Z. 10 (1921), no. 3-4, 214-216.
- [RM51] H. Robbins and S. Monro, *A stochastic approximation method*, Ann. Math. Statistics 22 (1951), 400-407.
- [SWS] F. Schipp, W. R. Wade and P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1990.
- [S48] A. A. Shneider, *On series of Walsh functions with monotonic coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 12 (1948), 179-192 (po rosyjsku).
- [S59] R. Sikorski, *Funkcje Rzeczywiste, Vol. II*, Monografie Matematyczne, Tom 37, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw 1959.
- [S82] E. M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 7 (1982), no. 2, 359-376; (przedruk w: *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund* (held at the University of Chicago, Chicago, Ill., March 23-28, 1981, Edited by William Beckner, Alberto P. Calderón, Robert Fefferman and Peter W. Jones, Wadsworth Mathematics Series, Vol. I, Wadsworth, Belmont, CA, 1983, 2-30).
- [St70] H. Steinhaus, *Wspomnienia*, Znak 22 (1970), 42-106.
- [T56] C. B. Tompkins, *Methods of steep descent*, (In: *Modern Mathematics for the Engineer*, Edited by E. F. Beckenbach, McGraw-Hill, New York 1956, 448-479; polskie tłumaczenie C. B. Tompkins, *Metody najszybszego spadku*, w: *Nowoczesna Matematyka dla Inżynierów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1962, 585-626).
- [T47] P. Turán, *On power-series whose coefficients form a multiply monotonic sequence*, w: *Semitic Studies in Memory of Immanuel Löw*, Budapest 1947, 300-305.
- [U60] S. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.
- [U69] S. Ulam, *Wspomnienia z Kawiarni Szkockiej*, Wiadom. Mat. 12 (1969), 49-58.
- [U96] S. Ulam, *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1996.
- [W33] G. N. Watson, *General transforms*, Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. 35 (1933), 156-199.
- [Z26] A. Zygmund, *Une remarque sur un théorème de M. Kaczmarz*, Math. Zeit. 25 (1926), 297-298.
- [Z27] A. Zygmund, *Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales*, Fundamenta Math. 10 (1927), 356-362.
- [Z59] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vols. I, II, Cambridge University Press, New York 1959.