Dorobek naukowy Tadeusza Ważewskiego

Po początkowym okresie zainteresowania topologią i teorią mnogości (por. prace [1], [2], [3], [3a]. [4]), zaczął swe badania w połowie lat dwudziestych koncentrować na zagadnieniach z zakresu analizy matematycznej. W latach trzydziestych poświęcił się niemal wyłącznie równaniom różniczkowym (i pewnym ich uogólnieniom związanym z teorią sterowania optymalnego), zajmując się nimi twórczo do końca życia. Tych zagadnień dotyczyły najważniejsze rezultaty, z których część weszła na stałe do matematyki stając się jej fragmentami już klasycznymi. Wcześniej jednak uzyskał Ważewski bardzo interesujące wyniki związane z wprowadzonymi przez siebie „jakobianami asymptotycznymi", których zastosowanie pozwoliło na udowodnienie twierdzenia o zmianie zmiennych w całkach pojedynczych i wielokrotnych bez założenia odwracalności transformacji realizujących te zmiany (por. prace [9], [11], [11a], [13]).

Rezultaty uzyskane m.in. w pracach [18], [18a], [19], [20], [22], [24], [25], [26], [29], [35], [37], [38], [36], [43], [50], [50a] dotyczą równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego. Ważewski przedstawia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań problemów Cauchy'ego, a także oszacowania obszaru istnienia rozwiązań, przy czym pewne z tych oszacowań są już nie do poprawienia.

W szczególności autor rozważa równania typu

$$(\bullet) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x})$$

gdzie $y=(y_1,\dots y_n)$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial y_n})$, a także układy takich równań i pewne nierówności różniczkowe (por. np. [88]).

W pracy [19] podane są bardzo ogólne kryteria jednoznaczności rozwiązań problemów Cauchy'ego dla równań typu (•), przy założeniu, że funkcje po prawych stronach równań spełniają warunek Kamke'go, istotnie ogólniejszy od warunku Lispchitza, zakładanego w klasycznych twierdzeniach o jednoznaczności.

Praca [37] jest pionierska w odniesieniu do układów równań typu przekątniowego.

Niektóre z tych prac poprawiają wyniki publikacji wcześniejszych; jest to jednak taka poprawa, które polega na udowodnieniu twierdzenia wzmocnionego w stosunku do poprzedniego (przez osłabienie założeń), ale przy istotnym wykorzystaniu tego wcześniejszego rezultatu. Ma to na przykład miejsce w przypadku pracy [35], która podaje twierdzenie o istnieniu rozwiązań problemów początkowych typu $z(0,y) = \varphi(y)$ dla równań typu (•), przy założeniu, że dane funkcje (a więc f i φ) są klasy C^2, a ich pochodne cząstkowe są ograniczone, oraz pracy [43], która przynosi wzmocnienie tego rezultatu polegające na zastąpieniu regularności klasy C^2 przez założenie istnienia pierwszych pochodnych cząstkowych i spełniania przez nie warunku Lipschitza. Dowód głównego wyniku pracy [43] opiera się na aproksymowaniu funkcji klasy C^1 o pochodnych spełniających stosowne warunki Lipschitza przez funkcje klasy C^2 i na wykorzystaniu twierdzeń o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych i od prawych stron równań, przy wykorzystaniu wyników pracy [35]. Wynik pracy [43] nie może być więc otrzymany bez pracy [35].

Praca [18] (por. także [18a]) zawiera pewien zaskakujący wynik „negatywny". Podaje bowiem konstrukcję równania różniczkowego $y' = f(x,y)$ o prawej stronie f mającej w pewnym obszarze Ω ciągłe pochodne cząstkowego dowolnego rzędu, przy czym każda całka pierwsza klasy C^1 jest w Ω stała; dla takiego równania nie mamy integralnego istnienia całki pierwszej. Zagadnieniom związanym z całkami pierwszymi poświęcił Ważewski jeszcze kilka innych prac (por. np. [28]).

Tadeusz Ważewski jest autorem podstawowych prac z teorii nierówności różniczkowych. Wprowadził pewne warunki typu monotoniczności funkcji wielu zmiennych, zakładane teraz powszechnie w twierdzeniach o nierównościach różniczkowych (i traktowane jako klasyczne, a więc - z reguły – już bez cytowania prac Ważewskiego w tym kontekście). Fundamentalna praca [76] opublikowana po wojnie, zawiera wyniki uzyskane w znacznej części podczas okupacji niemieckiej i wstępnie zaprezentowane na posiedzeniu Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego w dniu 27 marca 1945 roku (por. [45]). Zainspirowała ona cały nurt badań w Krakowie (a potem i w innych ośrodkach), uwieńczony napisaniem przez Jacka Szarskiego monografii {39}.

Najbardziej znane są głębokie wyniki Ważewskiego związane z pewną metodą topologiczną badania przebiegu rozwiązań układów równań różniczkowych, nazywanych metodą retraktową[1] lub – po prostu – metodą Ważewskiego. Podstawowy wynik (w różnych już teraz przedstawiany wariantach) nazywa się twierdzeniem retraktowym Ważewskiego, lub krótko – twierdzeniem Ważewskiego. Sam autor tej metody (którą nazywał *metodą topologiczną*) i twierdzenia przedstawił je (też w kilku wariantach) w pracach [52], [53], [54] i [90]. O pracy [54] wspomniano już wyżej jako podstawie do przyznania Ważewskemu nagrody im. Zaremby, praca [53] przedstawia najpełniejszą prezentację całości idei i szczegółów jej realizacji, praca [90] zaś jest streszczeniem tekstu plenarnego referatu sekcyjnego, który Tadeusz Ważewski wygłosił na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Amsterdamie w roku 1954, w sekcji analizy, jako zaproszony prelegent.

Metoda retraktowa Ważewskiego pozwala na stwierdzenie, że przy założeniu pewnych własności rozwiązań rozważanego równania różniczkowego na brzegu zadanego obszaru niektóre rozwiązania tego równania muszą pozostać w tym obszarze. Przy interpretacji rozwiązań jako funkcji dyktujących ruch punktów z upływem czasu według prawa wynikającego z rozważanego równania, czy też układu równań różniczkowych, można powiedzieć, iż ze sposobu zachowania się tych funkcji na brzegu obszaru (a więc ze sposobu dotarcia punktów do brzegu i ewentualnego przecięcia, czy też „przekroczenia" brzegu), wynika czasem (w zależności od tego właśnie jak odbywa się to „przekroczenie" brzegu) istnienie takich punktów, które nigdy tego obszaru nie opuszczą. Wiadomo, że pewien konkretny sposób docierania do brzegu i jego przekraczania (chodzi w szczególności o „silne wychodzenie", a więc „przecinanie" brzegu, „bez poślizgu" na brzegu) gwarantuje istnienie takich punktów, które nigdy rozważanego obszaru nie opuszczą. Należy dodać i mocno podkreślić, iż istotnym dla całego zagadnienia jest – oprócz warunku „silnego wychodzenia" - założenie, że tory punktów bliskich przebiegają blisko siebie; dokładne sformułowanie mówi o *ciągłej zależności* pozycji punktów po każdym czasie od ich (tych punktów) położeń początkowych.

Precyzyjne sformułowanie tego twierdzenia w jednej z najprostszych wersji wygląda następująco. Załóżmy, że funkcja rzeczywista *f* określona na płaszczyźnie jest na tyle regularna, że dla każdego punktu płaszczyzny (x^o, y^o) istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu początkowego

$$(\bullet\bullet) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x^o) = y^o$$

określone na całej osi liczbowej oraz rozwiązania zależą w sposób ciągły od warunków początkowych. Załóżmy ponadto, że dla dwóch liczb a i b , takich, że $a < b$, spełnione są warunki: $f(x,a) < 0$, $f(x,b) > 0$ dla wszystkich x. Wtedy, dla każdego x^o istnieje $y^o \in (a,b)$,

[1] Od pojęcia *retraktu* wprowadzonego do matematyki przez Karola Borsuka (1905-1982).

takie, iż jedyne (wysycone) rozwiązanie $\varphi(\cdot; x^o, y^o)$ problemu (••) spełnia podwójną nierówność $a < \varphi(x; x^o, y^o) < b$ dla wszystkich x. Krótko mówiąc : jeśli rozwiązania problemu (••) dotykając brzegu obszaru (pasa) $\boldsymbol{P} := \boldsymbol{R} \times (a,b)$ wychodzą silnie z tego pasa (przecinają jego brzeg pod kątem ostrym), to na każdym odcinku $\{x^o\} \times (a,b)$ znajdzie się taki punkt początkowy, że wychodzące z niego rozwiązanie rozważanego równania nie wyjdzie z pasa $\boldsymbol{P}$. Dowód tego twierdzenia (w takiej najprostszej wersji) jest prawie natychmiastowy i sprowadza się do zauważenia, iż zaprzeczenie tezy prowadzi do sprzeczności z dobrze znaną własnością (zwaną *własnością Darboux*) funkcji ciągłych. Sprawa przestaje być tak prosta w przypadku układów równań. Wtedy trzeba posłużyć się klasycznym twierdzeniem mówiącym o tym, iż sfera nie jest retraktem kuli. Stąd bierze się nazwa *twierdzenia retraktowego.*

Sformułujmy to twierdzenie w jednej z ogólniejszych wersji w odniesieniu do układów dynamicznych (w postaci będącej szczególnym przypadkiem sformułowania przedstawionego w {28}, rozdz. VII, uogólniającego wersje z {4} i {5}; por. też {40}).

Niech π będzie układem dynamicznym na przestrzeni topologicznej X (to znaczy, że π jest odwzorowaniem ciągłym $\boldsymbol{R} \times X \to X$, takim, że: $\pi(0,x) = x$, $\pi(t, \pi(s,x)) = \pi(t+s,x)$). Dla $x \in X$ przez $\pi_+(x)$ oznaczamy dodatnią półtrajektorię x t.j. zbiór $\pi_+(x) = \{\pi(t,x) : t \geq 0\}$. Segmentami trajektorii $(x, \pi(t,x))$, $(x, \pi(t,x)]$, $[x, \pi(t,x)]$, $[x, \pi(t,x))$ dla $t>0$ są – odpowiednio - zbiory: $\{\pi(s,x) : 0<s<t\}$, $\{\pi(s,x) : 0<s\leq t\}$, $\{\pi(s,x) : 0\leq s\leq t\}$, $\{\pi(s,x) : 0\leq s<t\}$ (w przypadku trzeciego z ich dopuszczamy $t=0$, co pozwala na rozważanie $[x, \pi(0,x)] = \{x\}$). Niech M będzie niepustym i otwartym podzbiorem X. Przez $S^0(\partial M)$ oznaczmy zbiór $\{x \in \partial M$: *istnieje* $t>0$, *takie że* $(x, \pi(t,x)] \cap$ *Closure* $M = \emptyset\}$. Punkt $x \in \partial M$ nazwiemy *punktem wyjścia (ze zbioru M)* jeśli istnieją $y \in \partial M$ oraz $t>0$, takie, że $x = \pi(t,y)$ oraz $[y, \pi(t,y)) \subset M$. Punkt $x \in \partial M$ nazwiemy *punktem silnego wyjścia (ze zbioru M)* jeśli jest punktem wyjścia i należy do zbioru $S^0(\partial M)$.

Twierdzenie. Przyjmijmy powyższe założenia i oznaczenia. Niech D będzie podzbiorem ∂M, a N podzbiorem $M \cup D$. Załóżmy, że: (i) każdy punkt wyjścia ze zbioru M jest punktem silnego wyjścia (ii) zbiór punktów wyjścia zawiera się w D, (iii) $N \cap D$ jest retraktem D, (iv) $N \cap D$ nie jest retraktem N. Wtedy istnieje $x \in N \cap M$, takie że $\pi_+(x) \subset M$.

Metoda retraktowa doczekała się wielu modyfikacji, uogólnień i przeniesień z klasycznej teorii równań różniczkowych zwyczajnych, dla potrzeb których została zbudowana przez Ważewskiego, na teorię ogólnych układów dynamicznych, równania cząstkowe, równania różniczkowo-funkcyjne etc. Prace różnych autorów poświęcone tej metodzie, jej zastosowaniom i modyfikacjom liczyć już można w setki. O jej wadze świadczą opinie wybitnych matematyków. Posłużmy się cytatem z {23} (por. też {22}). *Metodę retraktową Ważewskiego zalicza się do największych powojennych osiągnięć matematyki polskiej. Solomon Lefschetz, wybitny matematyk amerykański, wypowiedział w 1961 r. opinię, że metoda retraktowa Ważewskiego jest najoryginalniejszym odkryciem w równaniach różniczkowych zwyczajnych, uzyskanym na świecie po wojnie.* Wtedy, gdy ta opinia była wypowiadana, nie wiedziano jeszcze o tym, jaki wpływ na dalszy rozwój jakościowej teorii równań różniczkowych (i wyrosłej z niej teorii ogólnych układów dynamicznych) będzie miał podstawowy pomysł Ważewskiego związany z warunkiem „silnego wychodzenia" rozwiązań przez punkty leżące na brzegach rozważanych obszarów. To, co teraz uzyskuje się w teorii układów dynamicznych przy użyciu różnych metod topologii algebraicznej, stosując w szczególności tzw. bloki izolujące i teorię indeksu Conley'a, ma swój początek oparty na idei Ważewskiego (szerzej na ten temat w {41}).

Dodajmy, że zbiorowe dzieło {10} omawiające i podsumowujące najważniejsze rezultaty uzyskane przez matematyków w pierwszym półwieczu XX stulecia, wymienia wśród nich metodę retraktową Ważewskiego (zwrócił na to uwagę R.Duda w {12} na str.

191, pisząc wcześniej na str. 140 o zasługach szkoły Ważewskiego polegających na wprowadzeniu metod topologicznych do teorii równań różniczkowych i stwierdzając w tym kontekście, iż szkoła ta doszła do sławy po II wojnie światowej).

W tym samym numerze *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* z roku 1947, w którym ukazała się fundamentalna praca o metodzie retraktowej, wydrukowana została też inna, bardzo ważna praca Ważewskiego [48], która poświęcona była oszacowaniu obszarów istnienia tzw. funkcji uwikłanych, przy użyciu metod równań różniczkowych. Rozważane w związku z tym równania nosi nazwę *równania Ważewskiego*; na temat tego równania ukazały się prace różnych autorów (por. w szczególności {19}, {20}, gdzie znajdują się też informacje bibliograficzne).

W latach sześćdziesiątych XX wieku opublikował Ważewski serię prac z teorii sterowania, pokazując związki tej teorii z inkluzjami różniczkowymi, których pierwszym badaniom poświęcone były prace S. K. Zaremby (z Krakowa) i A. Marchaud'a (z Paryża) w latach trzydziestych (A.Marchaud**,** *Sur les champs de demi-cônes et équations differentielles du premier ordre,* Bull. Soc. Math. France 62(1934), 1-38 oraz *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leur intégrales,* Compositio Math., 3(1936), 89-127; S.K.Zaremba**,** *O równaniach paratyngensowych,* Dod. do Roczn. Polskiego Tow. Matematycznego 9(1935) oraz *Sur les équations au paratingent,* Bull. Sci. Math. 60(2) (1936), 139-160. Wspomniani autorzy używali wtedy innych nazw: *równań kontyngensowych i paratyngensowych*; sam Ważewski zaproponował termin: *równania orientorowe,* który teraz nie jest używany; obecnie mówi się o inkluzjach różniczkowych.. Ważewski pokazał, że prace tych dwóch autorów można wykorzystać jako podstawę teorii sterowania. Tej tematyki dotyczą m.in. prace: [111], [113], [115], [116], [117], [118], [119], [121], [122]. Przedostatnia z tej listy zawiera tekst odczytu plenarnego wygłoszonego na zaproszenie organizatorów międzynarodowej konferencji z serii EQUADIFF w Pradze w roku 1962, a trzecia od końca jest streszczeniem komunikatu przedstawionego w tym samy roku podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Sztokholmie. Do wyników Ważewskiego nawiązywało wielu autorów. W załączonej bibliografii umieszczono tylko kilka z nich ({3}, {7}, {18}, {33}, {34}, {45}, {46}).

Przy okazji omawiania prac Tadeusza Ważewskiego z teorii sterowania należy zwrócić uwagę na dwa charakterystyczne rysy jego badań. Po pierwsze dotyczyły one rzeczy ważnych i aktualnych w danym momencie. Po drugie, Ważewski uważał za naturalne pytania o zastosowania matematyki. Miał intuicję fizyczną i interesował się problemami pochodzącymi z nauk przyrodniczych. Umiał dostrzegać możliwości zastosowań tego, co nieraz od dawna było znane, jako część bardzo – być może – „abstrakcyjnej" teorii. I tak właśnie dostrzegł możliwość zastosowania „starych" wyników z lat trzydziestych (nader, na owe czasy, „abstrakcyjnych") dotyczących dziwnych, czy nawet – jak wtedy uważali niektórzy – wręcz dziwacznych, uogólnień równań różniczkowych zaproponowanych przez wspomnianych S.K.Zarembę i A.Marchaud'a i przystosowania ich do teorii optymalnego sterowania i teorii inkluzji różniczkowych. Jacek Szarski w swym przemówieniu na sesji poświęconej Tadeuszowi Ważewskiemu w listopadzie 1973 roku powiedział, że: „*Żywe zainteresowanie zjawiskami przyrody oraz głębokie przekonanie o tym, że matematyka stanowi język do ich opisu, zadecydowały o tym, że równania różniczkowe stały się główną domeną działalności naukowej Tadeusza Ważewskiego"* (por. {37}). Jako konkretny przykład (poza wspomnianą teorią sterowania) można przytoczyć zainteresowanie matematycznymi aspektami stosowania promieni rentgenowskich (por. [55]). Wypowiadał się na temat stosowania matematyki i związków matematyki z innymi naukami (por. np. [57]).

Ciekawe wypowiedzi Ważewskiego na tematy metodologiczne łączyły się z jego pasją nauczycielską, o czym będzie jeszcze mowa szerzej.

Do nurtu bliskiego z jednej strony zastosowań, z drugiej zaś ujmowania problemów poprzez możliwie ogólne metody, można zaliczyć zagadnienia dotyczące metody kolejnych przybliżeń w różnych jej wariantach. W pracach [107] i [108] udowodnione są twierdzenia o zbieżności ciągów kolejnych przybliżeń bez użycia szeregów porównawczych, a więc metodą inną niż klasyczna. Okazało się, że metoda Ważewskiego nadaje się do pewnych istotnych uogólnień, którym nie poddaje się ta klasyczna. W pracy [125] przeanalizowano związek między zbieżnością do zera różnicy między kolejnymi wyrazami ciągu przybliżeń i zbieżnością (do rozwiązania omawianego problemu) samego ciągu. Implikacja w jedną stronę jest oczywista, w drugą zaś ma miejsce przy pewnych dodatkowych założeniach (w tym jednoznaczności *a priori* ale bez zakładania istnienia rozwiązania). Podejście Ważewskiego (zaproponowanie ogólnej metody !) zaowocowało wieloma zastosowaniami w pracach innych autorów. Miało też znaczenie metodologiczne w odniesieniu do zagadnień całkiem elementarnych.

Jeszcze jednego przykładu problemów, których rozwiązanie dało nie tylko interesujący wynik naukowy, ale i ważną obserwację metodologiczną, dostarczają prace [63], [64] i [81], w których podano ogólny dowód tzw. reguły de l'Hospitala, wspólny dla wszystkich przypadków, w jakich ta reguła jest stosowana (w pracy [81] w odniesieniu do przestrzeni Banacha). Podobnie, aspekty metodologiczne wraz z interesującymi rezultatami naukowymi, przedstawiają prace [69], [70] i [71].

Prace [68] i [75] zawierają wyniki dotyczące wprowadzonego przez Ważewskiego pojęcia *asymoptotycznej koincydencji* rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Okazało się ono bardzo użyteczne w badaniach z zakresu jakościowej teorii tych równań. Zajmowali się nim potem inni matematycy.

Specjalna uwaga należy się krótkiej nocie [46] przedstawiającej pewną przybliżoną metodę (konstrukcję) dzielenia kąta, której autor zginął w getcie krakowskim. Historia tej noty jest dramatyczna. We wspomnieniach Tadeusza Pankiewicza[2] {24} (str. 46-48) znajduje się wzmianka o doktorze filozofii i praw Rappaporcie, ze Lwowa, który pasjonował się matematyką. *Pewnego razu* – pisze Pankiewicz - *przyszedł do mnie i wyznał mi, że chciałby wysłać list polecony do Genewy lub do ambasady szwajcarskiej w Berlinie, albowiem – jak twierdził – rozwiązał zagadnienie matematyczne [...] a mianowicie podział kąta na trzy części za pomocą linijki (niepodzielonej) i cyrkla.* Spełnienie tej prośby było nierealne, ale proszony nie miał odwagi powiedzieć o tym wprost proszącemu. Pankiewicz znalazł jednak wyjście i zwrócił się z tym do Ważewskiego, który *[...] na samym wstępie wyjaśnił [...], że zagadnienie to jest nierozwiązalne, podobnie jak perpetuum mobile, ale chętnie [...] porozmawia z dr. Rappaportem. Spotkanie doszło do skutku dwa razy.* Ta lakoniczna informacja (Pankiewicz nie podał szczegółów, ale nie było chyba innej możliwości jak posłużenie się sfałszowaną, lub – co najmniej – nie przysługującą Ważewskiemu – przepustką) powinna być zestawiona z przypomnieniem, że nie tak dawno sam Ważewski był więźniem obozu koncentracyjnego, co stanowiło oczywiste, dodatkowe obciążenie. Podjął jednak to niemałe ryzyko, aby porozmawiać o matematyce, ofiarowując przy tym rozmówcy niewymierny i trudny do przecenienia dar swojej obecności i zainteresowania. Okazało się, że sposób konstrukcji

[2] Był właścicielem apteki „Pod Orłem" na pl. Zgody 18 i prowadził ją – tolerowany przez okupantów – przez cały czas istnienie getta.

proponowany przez Rappaporta, nie prowadząc rzecz jasna do właściwego rozwiązania problemu, daje jednak bardzo dobre przybliżenie rozwiązania. Ważewski obiecał opublikowanie tego rezultatu po wojnie i słowa dotrzymał przedstawiając notę [46].

Wspomniano o pasji dydaktycznej Tadeusza Ważewskiego. Należy powiedzieć, że pasja ta szła w parze z ogromnym talentem z tym zakresie, ze wspaniałą umiejętnością prowadzenia wykładów i seminariów oraz z wielkim zaangażowaniem w ich przygotowanie. Zachowane w pamięci słuchaczy wielu pokoleń wspomnienia o jego wykładach analizy matematycznej i równań różniczkowych świadczą o wyjątkowym znaczeniu, jakie przywiązywał Ważewski do wyrabiania wyobraźni i intuicji fizycznej i geometrycznej. Zachowały się rękopiśmienne notatki zawierające elementarny wstęp do jakiegoś wykładu (zapewne pierwszego kursu analizy lub też może ogólnego wykładu dla nauczycieli matematyki). Jest tam najpierw mowa o nierównościach między liczbami, o przedziałach i o przyporządkowywaniu liczbom punktów na prostej. Warto przytoczyć obszerny fragment tych notatek (w cytacie zachowuje się podkreślenia z oryginału). *Mogłoby się wydawać, że używanie wyrazu punkt, wtedy gdy się ma na myśli liczbę jest wynikiem jakiegoś dziwacznego kaprysu powodującego tylko trudności. Tak jednak nie jest. Trudno jednym chwytem myśli ująć wszystkie liczby należące do przedziału [1,3]. Jeżeli jednak narysujemy odcinek [B,C] będący odpowiednikiem geometrycznym tego przedziału (zob. rys. poprzedni[3]), to jednym ruchem oka możemy przebiec przez wszystkie punkty tego odcinka. W ten sposób uzyskujemy jasny obraz zbioru liczb, które odpowiadają tym punktom. Rysunek lepiej bowiem przemawia do naszej wyobraźnie niż pojęcie czysto liczbowe. Pojęcia czysto liczbowe stają się dla nas bardziej przystępne i zrozumiałe, gdy je zobaczymy na rysunku. Dlatego t.zw. interpretacja geometryczna (...) różnych pojęć matematycznych ma ogromne znaczenie w matematyce[4].*

Wyjątkowemu darowi jasnego wykładu, a więc talentowi dydaktycznemu „na poziomie studenckim", towarzyszyła niezwykła umiejętność (oparta o własne dokonania naukowe) takiego stawiania problemów badawczych, że będąc wysoce niebanalnymi dawały się rozwiązywać i stanowiły inspiracje do samodzielnych badań. Zaowocowało to stworzeniem szkoły naukowej, nazywanej przez wielu specjalistów *Krakowską Szkołą Równań Różniczkowych.*

Doktoraty pod kierunkiem Tadeusza Ważewskiego uzyskali m.in. Jerzy Górski, Zbigniew Kowalski, Zofia Krygowska, Stanisław Łojasiewicz, Zofia Mikołąjska-Mlakowa, Włodzimierz Mlak, Czesław Olech Zdzisław Opial, Wacław Pawelski, Andrzej Pelczar, Andrzej Pliś, Franciszek H. Szafraniec, Jacek Szarski, Zofia Szmydt, Krzysztof Tatarkiewicz, Tsin-Hua-Szu, Andrzej Bernard Turowicz, Włodzimierz Wrona, Zygmunt Zahorski.

Mówiąc o indywidualnej pasji dydaktycznej Tadeusza Ważewskiego i jego talentach w tym zakresie uzewnętrznianych wobec uczniów na każdym poziomie, od studentów pierwszych lat studiów począwszy, po doktorantów i habilitantów, trzeba koniecznie dodać, iż wszystko to było zanurzone w ogólnym przeświadczeniu, że uniwersytet musi łączyć w naturalny sposób funkcje badawcze i nauczycielskie. *Całe Jego życie stanowi przykład na to, że badania naukowe i nauczanie są ze sobą organicznie związane i nie mogą być sztucznie rozdzielone,* powiedział o Ważewskim Jacek Szarski w cytowanym już uprzednio przemówieniu {37}, kontynuując następnie tak: *Seminaria Ważewskiego odznaczały się zupełnie specyficzną atmosferą głębokiej i wnikliwej analizy rozważanych zagadnień, a z drugiej strony niezwykle swobodnej dyskusji i wymiany myśli, przetykanej nierzadko ciętym i finezyjnym dowcipem.* O niezwykłych seminariach Ważewskiego podobnie wypowiedział się Andrzej Lasota w zbiorze wywiadów z członkami PAU{35}[5](t.1, str.467-493): *Seminarium Ważewskiego było chyba najbardziej oryginalnym seminarium na świecie(...) było dlatego tak*

[3] Odesłanie do wcześniej zrobionego, odręcznego, rysunku, na którym B=1,C=3.

[4] Arch. Oddz.Krakowskiego PAN, (materiały prof. Ważewskiego).

[5] W obu tomach tego zbioru jest wiele miejsc, w których jest mowa o Tadeuszu Ważewskim.

ciekawe, że niesłychanie dużo się na nim dyskutowało. (....) Cały czas trwała dyskusja, nieraz bardzo ostra, utrzymywana jednak w ryzach przez Ważewskiego, który znakomicie nią kierował. Nie pozwalał na zbyt daleko idące dygresje, ale też i nie hamował wypowiedzi (...).
To zaś, co i jak mówią uczniowie Ważewskiego o swoim Mistrzu jako osobie najlepiej przedstawić cytując dwa ostatnie akapity z opracowania {4}:

Ważewski był człowiekiem o rzadkich zaletach charakteru. Delikatny i nieśmiały, był równocześnie niezłomny i twardy w pełnieniu wziętych na siebie najtrudniejszych zadań. Umiał wybrać prawdę, którą można było powiedzieć, i prawdę, którą należało powiedzieć. Cechą jego natury było organiczne połączenie dobroci z mądrością. Mało żądał dla siebie, hojnie obdarzał innych. W obcowaniu z ludźmi był człowiekiem ujmująco czarującym. Z precyzji myśli krytycznej płynął szczególny wdzięk jego dowcipu. Wrażliwy na osiągnięcia nauki i sztuki, dociekliwość swą i energię skierował na matematykę i ona był pasją jego życia.

W sercach tych, którym dane było z Nim w współpracować i czerpać z nieograniczonej dobroci i wiedzy, na zawsze pozostanie niedoścignionym wzorem.

Lista publikacji Ważewskiego liczy 130 pozycji. Omówiono wyżej wybrane. Nie doczekał się niestety realizacji zamysł wydania podręcznika równań różniczkowych (zachowany rękopis zawiera tylko początek projektowanej książki).