2. Dorobek naukowy w zakresie teorii liczb

Dorobek naukowy Sierpińskiego obejmuje 724 prace i komunikaty badawcze, 113 artykułów przeglądowych lub popularnych i przemówień, 31 książek i broszur, nie licząc przekładów 14 skryptów. Dotyczy teorii liczb, analizy matematycznej, ogólnej i deskryptywnej teorii mnogości, topologii mnogościowej, teorii miary i kategorii oraz teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. Pełną bibliografię oraz omówienie dorobku Sierpińskiego zawierają jego „Ouvres choisies" (I–III) opublikowane 2 latach 1974–76 w Warszawie. Tu omówimy tylko prace z teorii liczb, odsyłając do omówienia innych dziedzin w artykułach:

— Stanisław Hartman, Les travaux de W. Sierpiński sur Analyse, T. I, 217–20, Warszawa 1974,
— A. Mostowski, La théorie générale des ensembles, T. II, 11–13, Warszawa 1976
— S. Hartman et E. Marczewski, Ensembles analytiques et projectifs, ibid. 13–17,
— E. Marczewski, Topologie générale, ibid., 17–20,
— S. Hartman, Méasure et catégorie. Congruence des ensambles, ibid. 20–25
— S. Hartman, Fonctions d'une variable réelle, ibid. 25–31.

Pierwsza praca Sierpińskiego [1], ściśle wzorowana na pracy Woronoja z 1903 r. o problemie dzielników, zawiera oszacowanie różnicy między liczbą punktów kratowych w kole o środku $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{x}$ a polem koła przez $c_1\sqrt[3]{x}$ (c_1,c_2,... oznaczają stałe). Poprzedni krok w tym kierunku należący do Gaussa był $c_2\sqrt{x}$, a następny krok zrobił dopiero w 1923 r. J. G. van der Corput, dowodząc oszacowania c_3x^{Θ}, $\Theta < 1/3$.

Wynik Sierpińskiego wszedł w sposób trwały do historii teorii liczb (por. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd II, str 183, Chelsea 1947). W związku z pracą [1] pozostaje praca [15], zawierjąca dowód wzoru

$$\sum_{l^2+m^2+n^2\le x} \frac{1}{l^2+m^2+n^2} = 4\pi\sqrt{x} + c_4 + O\left(x^{-1/6}\right),$$

a po drodze oszacowania

$$\sum_{l^2+m^2+n^2\le x} 1 = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + O\left(x^{5/6}\right)$$

ulepszonego w trzy lata później przez Landaua.

Praca doktorska Sierpińskiego [3] dotyczy sum postaci $\sum_{b\ge n\ge a} r(n)f(n)$, gdzie f jest dowolną funkcją liczbową, $r(n)$ zaś liczbą rozkładów liczby naturalnej n na sumy dwóch kwadratów (zamiast używanego obecnie oznaczenia $r(n)$ autor używa oznaczenia $\tau(n)$). Udowodnione są m. in. wzory następujące

$$\sum_{n\le x} r(n^2) = \frac{4}{\pi}x\log x + c_6x + O\left(x^{2/3}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{n\le x} r(n)^2 = 4x\log x + c_7x + O\left(x^{3/4}\log x\right), \tag{2}$$

Dowód opiera się na pomysłowym przekształceniu sumy $\sum_{b\geq n\geq 0} r(n)f(n)$, a mianowicie

$$\sum_{b\geq n\geq 0} r(n)f(n) = 4\sum_{\nu=0}^{\lfloor (b-1)/2\rfloor}(-1)^{\nu}\sum_{\mu=0}^{\lfloor b/(2\nu+1)\rfloor} f\left((2\nu+1)\mu\right)$$

co stanowi uogólnienie tożsamości Liouville'a

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor + \lfloor\sqrt{x-1^2}\rfloor + \lfloor\sqrt{x-2^2}\rfloor + \ldots = \lfloor\sqrt{\frac{x}{1}}\rfloor - \lfloor\sqrt{\frac{x}{3}}\rfloor + \lfloor\sqrt{\frac{x}{5}}\rfloor - \ldots$$

Wzór (1) został po raz pierwszy ulepszony w pracy M. I. Stroniny z 1969 r, wzór (2) zaś w pracy S. Ramanujana z 1916 r. nie zawierającej dowodów. Najlepszy znany obecnie wynik pochodzi od M. Kühleitnera (1992).

Z pracą [3] wiążą się tematycznie prace [5], [7] i [8]. W pracy [5] podane są wzory asymptotyczne dla sum $\sum_{n\leq x} f_i(n)$ $(i = 1, 2, 3)$, gdzie $f_1(n)$ jest liczbą liczb naturalnych m takich, że $m^2 \mid n$, $f_2(n)$ jest sumą tych liczb, $f_3(n)$ zaś największą z nich. Suma $\sum_{n\leq x} f_3(n)$ i jej uogólnienia były przedmiotem badań S. M. Lee w roku 1975.

Omówione dotychczasowe prace należą do analitycznej teorii liczb. Inna grupa wczesnych prac Sierpińskiego obejmująca [2], [4], [10], [13], [16], [23], [32], [44] dotyczy rozwinięć liczb rzeczywistych na szeregi i iloczyny nieskończone. Prace te w przekonaniu autora należały do analizy, dziś zalicza się je do teorii liczb (w Mathematics Subject Classification 2000 dział A67). Praca [2] zawiera dowód następującego twierdzenia. Niech $a > 1$ będzie liczbą całkowitą, $\tau(a,k) = 1-a$ jeżeli $a \mid k$, i 1 jeżeli $a \nmid k$, wówczas dla każdej liczby rzeczywistej $x < 1$

$$a^x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\tau(a,k)x}{k-x}\right).$$

Dla $x = 1/2$ wzór ten zawiera jako szczególne przypadki wzory podane wcześniej przez Eulera i Sterna.

Praca [13] zawiera m. in. wzór:

$$\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k_n}\right),$$

gdzie $k > 1$ jest liczbą naturalną, $k_1 = k$ i $k_{n+1} = 2k_n^2 - 1$. Szczególne przypadki tego wzoru były podane przez G. Cantora w 1879 r., wzór zaś odkryty ponownie 4 lata później przez F. Engela, któremu bywa na ogół przypisywany.

W pracy [44] zabrane są wyniki prac [23], [32], jest też materiał nowy. Autor rozważa następujące rozwinięcia liczny niewymiernej $x > 1$, w których a_k oznaczają liczby naturalne.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{a_k}\ ,\ a_{k+1} \geq a_k(a_k+1), \tag{3}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{a_1\ldots a_k}\ ,\ a_{k+1} > a_k, \tag{4}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_k}\,,\ a_{k+1} \geq a_k, \tag{5}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_1 \dots \alpha_k}\,,\ 0 \leq c_k < \alpha_k,\ c_k \text{ całkowite.} \tag{6}$$

Rozwinięcia typu (3) były badane wcześniej przez E. Cohena w 1891 r., a rozwinięcia typu (4) przez M. Ostrogradskiego, który jednak swoich wyników nie ogłosił i znaleziono je w jego spuściźnie pośmiertnej wiele lat po ukazaniu się pracy [44]. Szczególne przypadki rozwinięć typu (5) można znaleźć w dziełach Lamberta, nie dowiódł on jednak na ich temat żadnych twierdzeń ogólnych Zrobił to F. Engel; rozwinięcia typu (5) są nazywane powszechnie rozwinięciami Engela, z wyraźną krzywdą Sierpińskiego, który wyprzedził Engela o dwa lata. Wyniki Sierpińskiego dotyczące rozwinięć (3)–(6) zostały uogólnione w pracy doktorskiej G. Statemayera z roku 1931.

W starości Sierpiński wrócił do tej tematyki w pracach [605] i [636] dotyczących iloczynów nieskończonych. W drugiej z nich wzmacniał wyniki Oppenheima (1953) i uogólniał wynik Eseatta (1937).

Następna grupa wczesnych prac Sierpińskiego dotyczy aproksymacji diofantycznych. Grupa ta obejmuje prace [12], [14], [18], [19], [21], [24], [26] (rozszerzona wersja [18]), [28] (rozszerzona wersja [24]) i [95].

W pracy [19] dowodzi się, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby naturalnej n istnieją co najwyżej dwa ułamki p/q takie, że $|x - p/q| < \frac{1}{nq}$, $1 \leq q \leq n$. Prace [18] i [21] anonsują, zaś prace [12], [14] i [26] zawierają dowód, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{kx\} \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ = \frac{1}{2} & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wzór ten uogólniony jest w pracach [24], [28] dla niewymiernych x w sposób następujący:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{kx + y\} = \frac{1}{2}\ (y \text{ dowolne}).$$

Ten ostatni wzór równoważny jest równomiernemu rozmieszczeniu ciągu $kx \bmod 1$. Parę miesięcy wcześniej ten sam wynik otrzymał P. Bohl, a prap miesięcy później H. Wegl, którego następna podstawowa praca na temat równomiernego rozmieszczenia przyćmiła wszystkie wyniki wcześniejsze.

Praca [95] wiąże się z równomiernym rozmieszczeniem $\bmod 1$ ciągu αg^n, dotyczy bowiem liczb absolutnie normalnych. Nazywamy tak liczby rzeczywiste α takie, że dla każdego naturalnego $g > 1$ w rozwinięciu liczby α przy zasadzie g każda cyfra występuje z jednakową częstością. Według twierdzenia Borela prawie wszystkie liczby rzeczywiste są absolutnie normalne. [95] zawiera nowy dowód tego twierdzenia wraz z konstrukcją liczby absolutnie normalnej bez pewnika wyboru, co stanowi odpowiedź na pytanie Borela (1909).

Pozostałe arytmetyczne prace Sierpińskiego należą do elementarnej teorii liczb i dotyczą podzielności, kongruencji, równań diofantycznych, liczb pierwszych i pewnych zagadnień addytywnych.

Prace o funkcjach arytmetycznych dotyczyły z reguły funkcji specjalnie ważnych, takich jak funkcja Eulera ϕ lub suma dzielników, nie zaś ogólnej teorii. Praca [635] zawiera na przykład dowód, że równanie $\phi(x+k)=\phi(x)$ ma przy każdym naturalnym k co najmniej jedno rozwiązanie; do dziś nie wiadomo, czy ma co najmniej dwa.

Liczne prace Sierpińskiego dotyczyły liczb pierwszych. Interesował się ciągiem różnic $p_{n+1}-p_n$, gdzie p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą i dowiódł [634], że $\limsup_{n\to\infty}\min\{p_{n+1}-p_n, p_{n+2}-p_{n+1}\}=\infty$. Ten wynik był wielokrotnie wzmacniany i uogólniany, aż do wybitnej pracy M. Maiera (1981). Przypuszczenie Sierpińskiego sformułowane w [642], że każdy wiersz tablicy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & \dots & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

przy dowolnym $n>1$ zawiera liczbę pierwszą, stanowi daleko idące uogólnienie tzw. postulatu Bertranda. Sierpiński badał postać rozwinięcia dziesiętnego liczby pierwszej i dowiódł w [649], że dla każdego ciągu $k+l$ cyfr $b_1,\dots,b_{k+l}$, gdzie $b_1\neq 0$ i $(b_{k+l},10)=1$, istnieje liczba pierwsza, której rozwinięcie dziesiętne rozpoczyna się od $b_1,\dots,b_k$ i kończy na $b_{k+1},\dots,b_{k+l}$. Niełatwe uogólnienie tego twierdzenia zawiera praca Harmana (2006). Sierpiński rozważał również sumę cyfr n-tej liczby pierwszej i oznaczając ją przez S_n postawił w [672] pytanie, czy dla nieskończenie wielu n, $S_n>S_{n+1}$, co zostało pozytywnie rozstrzygnięte przez Erdös (1965).

Interesował się także przedstawialnością liczb pierwszych przez wielomiany i dowiódł [697], że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna a, że x^2+a przedstawia więcej niż n liczb pierwszych. Rozważał również rozmieszczenie liczb pierwszych w ciągach o wzroście wykładniczym i dowiódł istnienia nieskończenie wielu takich liczb nieparzystych $k>1$, że wszystkie wyrazy ciągu $k\dot{2}^n+1$ są złożone. Dowód ten podany w [660] jest efektywny, ale liczby k zeń otrzymane są rzędu setek tysięcy. Dotychczas nie wiadomo, jaka jest najmniejsza liczba k o wymienionej własności.

Do addytywnej teorii liczb można zaliczyć pracę [633] o przedstawieniach liczb wymiernych przez sumy odwrotności liczb naturalnych. Odwrotności takie nazywał Sierpiński ułamkami prostymi. Według przypuszczeń Erdösa i Straussa ułamek $4/n$ jest dla $n>1$ sumą trzech ułamków prostych. Sierpiński wypowiedział analogiczne przypuszczenie dla ułamków $5/n$, a B. M. Stewart (1964) sprawdził je dla wszystkich $n<10^9$. Rozkładom liczb wymiernych na ułamki proste poświęcona jest książeczka C[25].

Inne małe monografie Sierpińskiego dotyczą trójkątów pitagorejskich C[21], równań diofantycznych C[23], liczb pierwszych C[31] i liczb trójkątnych C[34]. Doczekały się one wielu przekładów na języki obce.

Trzy większe dzieła Sierpińskiego C[3], C[30] i C[39] zajmują w literaturze przedmiotu miejsce odrębne. Traktowane jako podręczniki zawierają stosunkowo ubogi zakres materiału, mianowicie elementy teorii liczb oraz najbardziej przystępne części jej bardziej zaawansowanych działów (nierówności Czebyszewa w teorii rozmieszczenia licz pierwszych, arytmetyka ciał kwadratowych, podstawy teorii form kwadratowych i dwójkowych). Natomiast, w przyjętych przez autora ramach, dzieła te mają charakter encyklopedyczny, wiele rezultatów specjalnych przytoczonych jest bez dowodów. Jak pisze W. J. LeVegue w recenzji książki C[39]: „To jest właśnie źródło, do którego należy sięgnąć, aby dowiedzieć się, co wiadomo na temat godnej uwagi rozmaitości zagadnień w elementarnej teorii liczb, które przyciągały uwagę przez lata. Styl jest żywy i autor jest mistrzem w swoim przedmiocie."