2. Dorobek naukowy Orlicza oraz nazwisko ORLICZ-a w matematyce

Władysław Orlicz napisał 176 prac naukowych, 2 podręczniki szkolne:

1. S. Kubrakiewicz i W. Orlicz, *Rachunki do I klasy szkoły powszechnej* , Wydawnictwo Zakładu Narodowego im. Ossolińskich, Lwów 1937, 92 strony.
2. A. Frejlich i W. Orlicz, *Matematika dlya klyasi serednikh zagal'no-osvitnikh shkil*, Państwowe Wydawnictwo Książek Szkolnych we Lwowie 1938, 168 stron (po ukraińsku).

i monografię:

3a. W. Orlicz, *Liniowa Analiza Funkcjonalna*, Peking 1963, 138 stron (po chińsku).

3b. W. Orlicz, *Linear Functional Analysis*, angielskie tłumaczenie z chińskiego książki [3a] przez Lee Peng Yee, Series in Real Analysis 4, World Scientific, Singapore 1992, 262 strony.

Dwa podręczniki szkolne sprzed wojny, pokazują fakt przywiązywania przez Orlicza dużej wagi do spraw dydaktycznych.

Mówiąc o książkach Władysława Orlicza trzeba jeszcze raz wspomnieć o jego *Dziełach Zebranych* wydanych przez Państwowe Wydawnictwo Naukowe w dwóch tomach w 1988 roku jako *Władysław Orlicz, Collected Papers. I, II.* With contributions by Wanda Matuszewska and Lech Maligranda, oraz o rekonstrukcji książki Banacha *Wstęp do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej*, Monografie Matematyczne, Tom 17, Warszawa-Wrocław 1951. Ta ostatnia książka była przygotowywana do publikacji już przed wojną, w drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego, ale w wyniku działań wojennych zniszczony został rękopis i część gotowego już składu. Orlicz i Alexiewicz uzupełnili brakujące fragmenty tekstu.

Trzeba jeszcze odnotować, że Orlicz planował napisanie książki *Ćwiczenia i zagadnienia analizy matematycznej*, gdyż zachował się jednostronicowy konspekt z 1 marca 1954 roku z takimi planami. Ponadto w liście do Redakcji Polskiego Słownika Biograficznego z dnia 29 marca 1965 r., w związku z korektą noty biograficznej o Stefanie Kaczmarzu [110] pisał, że przed wojną wstępnie pracowali z Kaczmarzem nad książką matematyczną dla szkół wojskowych.

Z lat siedemdziesiątych zachowało się 106 stron pisanego maszynopisu po niemiecku książki Orlicza *Saksräume und ihre Anwendungen.* Niestety materiał ten nie został opublikowany.

Naukowo Orlicz zajmował się teorią sumowalności, szeregami ortogonalnymi, analizą funkcjonalną, funkcjami rzeczywistymi, teorią miary i równaniami różniczkowymi. Był on twórcą przestrzeni funkcji oraz ciągów, nazwanych po latach *przestrzeniami Orlicza.* Uogólniają one znane przestrzenie F. Riesza (przestrzenie L^p).

W omówieniu dorobku naukowego Orlicza skupimy uwagę przede wszyskim na tych jego wynikach, które trafiły do klasyki, do kanonu wiedzy matematycznej i przyniosły ich autorowi największe uznanie. Wyników takich jest niemało i konieczna jest ich selekcja. Wybór oczywiście jest subiektywny.

Dorobek naukowy Orlicza można podzielić na kilka grup tematycznych:

A. Przestrzenie Orlicza.
B. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne.
C. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa.
D. Teoria sumowalności.
E. Funkcjonały ortogonalnie addytywne, przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza.
F. Operatory wielomianowe i analityczne.
G. Funkcje wektorowe: mierzalność, różniczkowanie i analityczność.
H. Indeksy Matuszewskiej-Orlicza.
I. Interpolacja operatorów.
J. Równania różniczkowe — twierdzenia generyczne.
K. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji.

W każdej powyższej grupie tematycznej wypiszę rezultaty lub określenia zawierające nazwisko Orlicza. Omówienie kończy się listą monografii i artykułów przeglądowych, w których znaleźć można szersze komentarze dotyczące znaczenia badań Orlicza i rozwoju jego idei. Pozycje te cytowane są w tekście z użyciem symbolu złożonego z pierwszych liter autora bądź autorów oraz często ostatnich dwóch cyfr roku opublikowania. Natomiast prace Orlicza numerowane są zgodnie z ich spisem zamieszczonym w dalszej części 6b artykułu.

A. Przestrzenie Orlicza

W 1910 roku F. Riesz wprowadził do analizy przestrzenie $L^p[a,b] = L^p$ i ℓ^p, które odgrywają ważną rolę w różnych działach analizy. Przynależność funkcji x do L^p określa warunek

$$I_\varphi(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|)dt < \infty,$$

gdzie $\varphi(u) = u^p$, $p \geqslant 1$. Niemal natychmiast podjęto próby zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszymi funkcjami φ. Za wyjściową można uznać pracę W. H. Younga z 1912 roku zawierającą pewną nierówność funkcyjną, która z czasem trafiła do klasyki z nazwiskiem jej odkrywcy. W 1928 roku Kaczmarz i Nikliborc [KN28] badali, za Paulem Noaillonem (którego rozważania nie zostały opublikowane) zbieżność ciągu funkcji f_n do funkcji f w następującym sensie

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(|f_n(t) - f(t)|)dt = 0.$$

Wykazali oni szereg twierdzeń dotyczących takiej uogólnionej zbieżności. Uogólnieniami przestrzeni L^p zajęli się w końcu lat dwudziestych R. Cooper i J. C. Burkill. Ten ostatni opublikował następujące twierdzenie ([Bu28]): dla dowolnej funkcji x spełniającej warunek $I_\varphi(x) < \infty$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja schodkowa s dla której zachodzi $I_\varphi(x - s) < \varepsilon$. Praca Burkilla zainteresowała Zygmunta Birnbauma i Władysława Orlicza. Dowiedli oni w [8], że to twierdzenie (oraz jego wariant z funkcją ciągłą zamiast s) nie jest prawdziwe w ogólności, ale jest prawdziwe gdy φ spełnia tzw. *warunek* Δ_2 *dla dużych* u, tj. $\varphi(2u) \leqslant C\varphi(u)$ dla pewnej stałej $C > 0$ oraz $u \geqslant u_0 \geqslant 0$ (gdy nierówność zachodzi odpowiednio w pewnym prawostronnym otoczeniu zera lub w całej dziedzinie, to mówi się o *warunku* Δ_2 *dla małych* u i odpowiednio o *warunku* Δ_2 *dla wszystkich* u).

W kolejnej pracy [9] Birnbaum i Orlicz rozważali funkcje ciągłe $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ nazwane N'-*funkcjami*, od których wymagali, aby: $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ oraz $\lim_{u\to 0^+} \varphi(u)/u = 0$, $\lim_{u\to\infty} \varphi(u)/u = \infty$ (warunki graniczne będą później znane jako warunki 0_1 i ∞_1). Z N'-funkcją φ związali też inną N'-funkcję φ^* równością

$$\varphi^*(v) = \sup_{u\geqslant 0}\{uv - \varphi(u)\}. \tag{1}$$

O funkcji φ^* mówi się dzisiaj *funkcja dopełniająca* (lub *sprzężona*) do φ. Równość (1) implikuje oczywistą uogólnioną nierówność Younga: $uv \leqslant \varphi(u) + \varphi^*(v)$.

W przypadku wypukłej funkcji φ Birnbaum i Orlicz uzyskują całkowe reprezentacje $\varphi(u) = \int_0^u p(t)dt$ i $\varphi^*(v) = \int_0^v p^{-1}(t)dt$, gdzie p^{-1} jest funkcją odwrotną (w sensie uogólnionym) do p. Tym samym otrzymali też klasyczną nierówność Younga.

Odnotujmy tutaj, że liczni specjaliści z analizy wypukłej przypisują zdefiniowanie wzorem (1) funkcji sprzężonej S. Mandelbrojtowi, przytaczając pewną jego pracę z roku 1939, pracę o 8 lat późniejszą od publikacji Birnbauma i Orlicza. W [9] zostało też wprowadzone pojęcie równoważności N'-funkcji φ, ψ: istnieją stałe dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a\varphi(bu) \leqslant \psi(u) \leqslant c\varphi(du),$$

przy czym żąda się zachodzenia nierówności bądź w otoczeniu nieskończoności (wtedy mówi się o równoważności funkcji dla dużych u), bądź w otoczeniu zera (równoważność dla małych u), bądź dla $u \in [0, \infty)$ (równoważność dla wszystkich u). Praca [9] zawiera ponadto wyniki badań zbiorów

$$L_0^\varphi = \{x : I_\varphi(x) < \infty\}, \quad \ell_0^\varphi = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|) < \infty\},$$

które prowadzą m.in. do uogólnienia znanego twierdzenia Landau'a: dla $p, q \geqslant 1$ zachodzi $x\ell^p \subset \ell^1 \Leftrightarrow x \in \ell^q$, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Birnbaum i Orlicz nie analizowali jednak rozpatrywanej problematyki z punktu widzenia teorii przestrzeni Banacha. Ten kierunek podjął Orlicz w roku 1932 publikując pracę [13], którą uznać wypada za *pierwszy* artykuł traktujący o liniowo-topologicznych własnościach klasy L_0^φ z *wypukłą* funkcją φ spełniającą warunek Δ_2 (przy tym ostatnim założeniu L_0^φ jest przestrzenią liniową). Orlicz zauważył, że równość

$$\|x\|_\varphi^0 = \sup\{\int_a^b |x(t)y(t)|dt : \int_a^b \varphi^*(|y(t)|dt \leq 1\}$$

definiuje normę na L_0^φ. Norma ta zwana jest dzisiaj *normą Orlicza*.

Już w roku 1936 Orlicz zajął się sytuacją ogólniejszą. W pracy [27] zrezygnował z warunku Δ_2 i rozważał przestrzeń liniową

$$L^\varphi[a,b] = L^\varphi = \{x : I_\varphi(\lambda x) < \infty \text{ dla pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego od } x\}, \tag{2}$$

a następnie udowadnił zupełność przestrzeni $(L^\varphi, \|\cdot\|_\varphi^0)$. Trzeba tu zwrócić uwagę na fakt, że $L^\varphi = L_0^\varphi$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ spełnia warunek Δ_2 (dla dużych u). Przestrzenie określone równością (2) znane są obecnie jako *przestrzenie Orlicza*. Artykuł [27] zawiera też badania *ciągowych przestrzeni Orlicza*

$$\ell^\varphi = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda|x_n|) < \infty \text{ dla } \text{ pewnego } \lambda > 0 \text{ zależnego } \text{ od } x\},$$

a także następujące

Twierdzenie (Orlicz, 1936).

(a) *Zbieżność* $\|x_n - x\|_\varphi^0 \to 0$ *jest równoważna warunkowi* $I_\varphi(\lambda(x_n - x)) \to 0$ *dla każdego* $\lambda > 0$.

Jeżeli φ *spełnia warunek* Δ_2 *dla dużych* u, *to:*

(b) *Przestrzeń* $L^\varphi[a,b]$ *jest ośrodkowa, co więcej, układ Haara jest bazą w* $L^\varphi[a,b]$.

(c) *Przestrzeń sprzężona do* $L^\varphi[a,b]$ *jest izomorficzna z* $(L^{\varphi^*[a,b]}, \|\cdot\|_{\varphi^*}^0)$.

(d) *Przestrzeń* $L^\varphi[a,b]$ *jest refleksywna o ile* φ^* *także spełnia warunek* Δ_2.

Obiekty L^φ, L_0^φ wzbudziły zainteresowanie już przed drugą wojną światową. Wspominane są w monografiach S. Banacha [Ba32] (uwagi do wstępu, przykład 13) i A. Zygmunda [Zy35]. Wydaje się, iż termin *przestrzenie Orlicza* po raz pierwszy pojawił się w przeoczonej przez wielu specjalistów pracy M. Morse'a i W. Transue z roku 1950 (patrz [MM50], str 595). Użyli go też M. A. Krasnoselskiĭ i Ya. B. Rutickiĭ w artykule [KK51] z roku 1951 oraz A. C. Zaanen w publikacji [Za52] z roku 1952, a potem w monografii [Za53] z roku 1953.

Udzielając wywiadu dla tygodnika ,,Wprost" (wywiad ukazał się 6 listopada 1983 roku [B83]) na pytanie ,, jak powstały pana przestrzenie", Orlicz odpowiedział:

Byłem, jako stypendysta, w sławnym centrum matematycznym Göttingen. Razem z kolegą Birnbaumem studiowaliśmy prace matematyków angielskich. Zuważyliśmy w nich różne błędy, wiedzieliśmy, że można lepiej to zrobić. Opublikowaliśmy pierwszą pracę. Tak się zaczęło. Później nastąpiła ogromna fala analizy funkcjonalnej, już we Lwowie. Wtedy napisałem moją pierwszą pracę na temat nowego rodzaju przestrzeni funkcyjnych, nazwanych z biegiem czasu moim nazwiskiem. Jeżeli w ogóle idzie o tę analizę, to nie mieliśmy konkurencji w tym czasie na całym świecie. Co innego teraz. Wszystko się rozrosło, jest straszliwa konkurencja. Pracuje się nad czymś i nigdy nie wiadomo czy nie zostało to już dawno gdzieś w Australii, Francji czy Japonii zrobione. Trudność polega także na tym, że problemy są coraz bardziej wyrafinowane, coraz bardziej są skomplikowane zagadnienia.

Dokładniej wyglądało to tak, że Orlicz z kolegą ze Lwowa Z. W. Birnbaumem spotkali sie w 1930 roku w Getyndze i napisali dwie prace [8] i [9]. W pierwszej, z roku 1931, poprawili błąd w pracy J. C. Burkilla z 1928 roku w twierdzeniu o aproksymacji. W drugiej, 68 stronicowej pracy z 1931 roku Birnbaum i Orlicz uogólnili twierdzenie Landaua (był to wielki matematyk, którego poznali właśnie w czasie pobytu w Getyndze). Ale przestrzeni nadal tam nie było. Dopiero w pracy Orlicza z 1932 roku, i później w pełnej ogólności w roku 1936, pojawiły się nowe przestrzenie. To było przyczyną dlaczego termin *przestrzenie Orlicza* pojawił się dopiero w pracy Morse i Transue z 1950 roku i następnie w pracy [Za52] oraz książce Zaanena [Za53] z 1953 roku.

Na upowszechnienie terminu *przestrzenie Orlicza* znaczny wpływ miała oprócz książka Zaanena [Za53], wydana w 1958 roku monografia matematyków radzieckich z Woroneża, Krasnoselskiego i Rutickiiego [KR58], a szczególnie jej angielskie tłumaczenie z 1961 roku. Przestrzenie Orlicza stały się wkrótce obiektem badań na całym świecie i znalazły liczne zastosowania. Wspomnijmy, że czasami są wśród matematyków zwolennicy terminu przestrzenie Birnbauma-Orlicza (por. [Bu78] i [Wo97]), jednak obecnie, całkiem zresztą słusznie, przestrzenie te są związane tylko z nazwiskiem Orlicza.

Należy podkreślić, że Zaanen w pracy [Za52] rozważał przestrzenie L^φ generowane przez tzw. funkcje Younga φ, tzn. dopuszcza się przyjmowanie przez φ wartości 0 w otoczeniu zera i wartości $+\infty$ (wtedy przestrzeń L^∞ jest też przestrzenią typu L^φ). Tak ogólne założenia o φ przyjął również w swojej rozprawie doktorskiej [Lu55] z 1955 roku W. A. J. Luxemburg, który wykorzystywał następującą normę w L^φ:

$$\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant 1\}. \tag{3}$$

Jest ona równoważna normie $\|\cdot\|_\varphi^0$, gdyż $\|x\|_\varphi \leqslant \|x\|_\varphi^0 \leqslant 2\|x\|_\varphi$. Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ nazwali normy $\|\cdot\|_\varphi, \|\cdot\|_\varphi^0$ odpowiednio *normami Luxemburga i Orlicza.* Nazwanie normy (3) normą Luxemburga jest nieuzasadnione, bo równość (3) występuje zarówno w pracy [MT50] oraz w monografii H. Nakano [Na50], a więc w publikacjach o 5 lat starszych od doktoratu Luxemburga. Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ w [KR58] podają, że

$$\|x\|_\varphi^0 = \inf_{k>0} \frac{1 + I_\varphi(kx)}{k}. \tag{4}$$

Wyrażenie po prawej stronie jest tzw. normą Amemiyi $\|\cdot\|_\varphi^A$ rozważaną w książce Nakano cytowanej przez Krasnosielskiego i Rutickiego. Pozostaje więc zagadką, jak to się stało, że zauważając normę Amemiya Krasnoselskii i Rutickii przeoczyli równość (3).

Równość $\|x\|_\varphi^0 = \|x\|_\varphi^A$ jest bardzo ważna z punktu widzenia geometrycznych własności przestrzeni Orlicza L^φ. Pozostaje ona prawdziwa także w sytuacji, gdy φ jest funkcją Younga (udowodniono to późno, bo dopiero Hudzik i Maligranda [HM00] zrobili to w 1999 roku). Uzupełniając informacje o postaciach norm w przestrzeniach L^φ przytaczamy następujący wynik Orlicza z pracy [97]:

Twierdzenie Orlicza (1961). *W przestrzeni Orlicza $L^\varphi(\mu)$ norma Luxemburga-Nakano $\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant 1\}$ jest równa*

$$\|x\|_\varphi = \inf_{k>0} \frac{max\,\{1, I_\varphi(kx)\}}{k}. \tag{5}$$

W pracach i monografii Zaanena oraz w książce Krasnoselskiego i Rutickiego po raz pierwszy zastosowano przestrzenie Orlicza w teorii liniowych i nieliniowych równań całkowych. Później zaczęto wykorzystywać je także w teorii równań różniczkowych, konstruktywnej teorii funkcji i teorii aproksymacji, probabilistyce, statystyce matematycznej. Przestrzenie Orlicza znacznie rozszerzyły problematykę badawczą w porównaniu z przestrzeniami L^p choćby w zakresie własności geometrycznych. Zagadnienia różnych typów wypukłości, gładkości przestrzeni L^φ zainteresowały na długo znaczną liczbę matematyków (m.in. W. A. J. Luxemburga, H. W. Milnesa, B. A. Akimovicha, M. M. Rao, S. L. Troyanskiego, K. Sundaresana, B. Turetta, H. Hudzika, A. Kamińską, J. E. Jamisona, P.-K. Lina, S. Chena, T. Wanga, Y. Wanga, C. Wu, W. Kurca, R. Płuciennika, Y. Cui, B.-L. Lina).

Idea zastąpienia funkcji potęgowej ogólniejszą została przeniesiona na inne typy przestrzeni funkcyjnych. Zaczęto z powodzeniem rozwijać wielokierunkowe badania znanych dziś szeroko przestrzeni Besicovicha-Orlicza, Hardy'ego-Orlicza, Lipschitza-Orlicza, Lorentza-Orlicza, Marcinkiewicza-Orlicza, Orlicza-Sobolewa, Orlicza-Zygmunda. Tematyka badawcza związana z przestrzeniami Orlicza podejmowana była i jest przez nierzadko wybitnych specjalistów skupionych w licznych ośrodkach w różnych punktach globu. Wśród nich wymienić należy:

— Sapporo, gdzie rozwijano głównie ogólną teorię przestrzeni modularnych i poświęcono sporo uwagi przestrzeniom Orlicza stanowiącym bardzo ważny typ przestrzni modularnych; działali tu przede wszystkim: H. Nakano, I. Amemiya, T. Ando, T. Shimogaki, S. Yamamuro, S. Koshi, J. Ishii,

— Woroneż, w którym zajmowano się operatorami liniowymi i nieliniowymi w przestrzeniach L^φ i stosowano te przestrzenie do problemów równań całkowych, rozważano znacznie ogólniejsze przestrzenie symetryczne i zagadnienia interpolacji operatorów; do tej grupy należeli m.in.: M. A. Krasnoselskiĭ, Ya. B. Rutickiĭ, E. I. Pustylnik, D. V. Salekhov, E. M. Semenov, V. I. Sobolev, P. P. Zabreiko, a współpracowali z nimi I. V. Shragin, M. M. Vainberg i G. Ya. Lozanovskiĭ,

— Leiden, miejsce szczególnie ważnych badań nad kratami liniowymi i przestrzeniami Banacha funkcji mierzalnych (w tym przestrzeni Orlicza) prowadzonych przez A. C. Zaanena, W. A. J. Luxemburga, W. J. Classa J. J. Groblera, E. de Jonge, B. de Pagtera, A. R. Schepa, W. K. Vietscha,

— Poznań skupiający liczne grono wychowanków Władysława Orlicza i Juliana Musielaka oraz ich uczniów (J. Albrycht, L. Drewnowski, P. Foralewski, H. Hudzik, A. Kamińska, P. Kolwicz, P. Kranz, W. Kurc, I. Labuda, R. Leśniewicz, L. Maligranda, M. Mastyło, W. Matuszewska, M. Nawrocki, M. Nowak, R. Płuciennik, St. Stoiński, R. Taberski, R. Urbański, A. Waszak, M. Wisła, W. Wnuk). Podjęli oni zagadnienia geometrycznych i strukturalnych własności przestrzeni Orlicza i ich ogólniejszego wariantu (przestrzenie Musielaka-Orlicza), a także interpolacji operatorów, przestrzeni Hardy'ego-Orlicza i przestrzeni modularnych. Ta problematyka była również rozpatrywana przez matematyków francuskich: Ph. Turpina i E. Ginera,

— Jerozolima, gdzie uzyskano ważne twierdzenia dotyczące izomorficznej i lokalnej struktury przestrzeni Orlicza; autorami tych twierdzeń są m.in.: J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Z. Altshuler, K. J. Lindberg. Powyższa tematyka była kontynuowana, ze znakomitymi rezultatami, przez N. J. Nielsena, N. J. Kaltona, J. Y. T. Woo oraz matematyków hiszpańskich: F. L. Hernándeza, B. Rodrígueza-Salinasa i C. Ruiza,

— Harbin, znany przede wszystkim z wielu wyników z zakresu geometrii przestrzeni funkcyjnych uzyskanych przez S. Chena, Y. Cui, Y. Duana, Z. Shi, H. Sun, T. Wanga, Y. Wanga, Z. Wanga, C. Wu.

Orlicz wielokrotnie powracał do tematyki przestrzeni L^φ, której poświęcone są prace [78], [81], [85], [93], [94], [96], [98], [112], [125], [154], [172]. Interesował się też bardzo przestrzeniami wyznaczonymi przez *niewypukłe* funkcje φ. Najczęściej przyjmowanymi przez niego założeniami o funkcji $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ były: ciągłość, nieograniczoność, niemalenie oraz $\varphi(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Funkcje takie określa się mianem *funkcji Orlicza* lub *φ-funkcji*.

Efektem współpracy ze Stanisławem Mazurem jest artykuł [78], gdzie podano warunki konieczne i dostateczne liniowości zbioru L_0^φ przy bardzo ogólnych założeniach o φ (nie żądano ani ciągłości ani monotoniczności), a ponadto dyskutowano możliwość wprowadzenia odpowiedniej F-normy w takich przestrzeniach. Właściwą okazała się *F-norma Mazura-Orlicza*

$$|x|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0 : I_\varphi(x/\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}.$$

Co więcej autorzy pracy [78] stwierdzili, że L^φ można wyposażyć w normę zupełną $\|\cdot\|$ o własności $\|x_n\| \to 0 \Rightarrow I_\varphi(x_n) \to 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej.

Pierwotnie przestrzenie L^φ określono jako przestrzenie pewnych funkcji na przedziale i całka definiująca funkcjonał I_φ była całką względem miary Lebesgue'a. Oczywiście można, i często tak się czyni, rozpatrywać przestrzenie Orlicza nad dowolną miarą μ:

$$L^\varphi(\mu) = \{x \in L^0(\mu) : I_\varphi(\lambda x) = \int_\Omega \varphi(\lambda |x(t)|) d\mu < \infty \text{ dla } \quad \text{pewnego } \lambda > 0\},$$

gdzie $L^0(\mu)$ jest przestrzenią klas równoważności, względem równości μ-prawie wszędzie, funkcji rzeczywistych (lub zespolonych) mierzalnych względem σ-algebry podzbiorów zbioru Ω, na której zadana jest miara μ. Własności miary μ nie pozostają bez wpływu na własności przestrzeni $L^\varphi(\mu)$. Ważne są tu trzy typy miar: bezatomowa i nieskończona, bezatomowa i skończona oraz miara licząca na zbiorze potęgowym zbioru liczb naturalnych. Dla każdego z tych przypadków istotne jest zachowanie się funckji φ odpowiednio: w całej dziedzinie, w otoczeniu nieskończoności, w otoczeniu zera. Na potwierdzenie tego faktu zacytujemy następujące twierdzenie podane w [78]:

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1958). *Jeżeli miara μ jest bezatomowa i skończona (licząca), to przestrzeń $L^\varphi(\mu)$ jest lokalnie wypukła, wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest równoważna funkcji wypukłej w pewnym otoczeniu nieskończoności (zera).*

Przestrzenie Orlicza to już klasyczne przykłady przestrzeni Banacha. Świadczyć o tym mogą następują dane zaczerpnięte z *Mathematical Reviews (MathSciNet* z lat 1940 - 2008), gdzie termin *przestrzeń Orlicza* pojawił się w tytułach prac ponad 1.100 razy, a w tytułach lub streszczeniach 2.500 razy (termin *przestrzeń Banacha* pojawił się: 12.450 i 50.700 razy, odpowiednio).

Monografie o przestrzeniach Orlicza jakie zostały dotychchas opublikowane to (chronologicznie): Krasnoselskiĭ i Rutickiĭ [KR58], Lindenstrauss i Tzafriri [LT77, 79], Musielak [Mu83], Wu i Wang [WW83], Maligranda [Mal89], Rao i Ren [RR91], Chen [C96] oraz Rao i Ren [RR02].

Na zakończenie **anegdota** związana z ,,przestrzeniami Orlicza":
Profesor Orlicz złożył podanie o przydział w Poznaniu większego mieszkania.
Urzędnik odpowiedział: Nie możemy spełnić Pańskiej prośby o większe mieszkanie
przecież Pan ma **własne przestrzenie !!!**.

B. Zbieżność bezwarunkowa i szeregi funkcyjne

Przypomnijmy, że jeśli τ jest topologią na przestrzeni liniowej X, to szereg $\sum_1^\infty x_n$ elementów tej przestrzeni nazywa się:

- *bezwarunkowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy z szeregów $\sum_1^\infty x_{\pi(n)}$, gdzie π oznacza dowolną permutację zbioru liczb naturalnych,
- *podszeregowo zbieżnym* (względem τ), gdy τ-zbieżny jest każdy podszereg $\sum_1^\infty x_{n_k}$, gdzie (n_k) jest dowolnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych.

Orlicz używał terminu ,,szereg doskonale zbieżny" zamiast ,,szereg podszeregowo zbieżny". Wiedział on, że w przestrzeniach Banacha zbieżność bezwarunkowa i podszeregowa w topologii normowej pokrywają się (fakt ten opublikował dość późno, bo dopiero w roku 1933). Zainicjował też, trwające przez wiele lat, badania związków między różnymi rodzajami zbieżności szeregów w różnych topologiach, najwięcej uwagi poświęcając właśnie zbieżności bezwarunkowej i podszeregowej. W pracy [5] z roku 1929 sformułował następujące twierdzenie:

Twierdzenie Orlicza (1929). *Szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w ciągowo słabo zupełnej przestrzeni Banacha X, wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla wszystkich liniowych i ciągłych funkcjonałów x^* na X.*

Analizując dowód powyższego twierdzenia zauważył możliwość opuszczenia założenia ciągowej słabej zupełności przy równoczesnej konieczności zastąpienia warunku $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ silniejszym założeniem podszeregowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ w słabej topologii (w klasie ciągowo słabo zupełnych przestrzeni Banacha pojęcia te są równoważne). Fakt ten został przedstawiony w trakcie jednego ze spotkań lwowskich matematyków, ale Orlicz nie zdecydował się na opublikowanie ulepszonej wersji twierdzenia, nie doceniając wówczas pełnej jego wartości. Twierdzenie Orlicza w zmienionej wersji wypłynęło prawie dziesięć lat później w jednej z prac B. J. Pettisa.

Twierdzenie Orlicza-Pettisa (Orlicz 1929; Pettis 1939). *Szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny (w topologii normy), wtedy i tylko wtedy, gdy jest podszeregowo zbieżny w słabej topologii.*

Pettis przedstawił dowód twierdzenia Orlicza w pełnej ogólności, powiązał je z teorią miar wektorowych i podał następujące równoważne sformułowanie:

Jeżeli miara określona na σ-algebrze jest przeliczalnie addytywna w topologii słabej, to jest przeliczalnie addytywna w topologii normowej.

Ze względu na to, że Pettis formalnie jako pierwszy podał dowód omawianego twierdzenia w pełnej ogólności, a zwłaszcza wskazał jego interesujące konsekwencje, weszło ono do literatury pod nazwą *twierdzenia Orlicza-Pettisa.* Różne warianty i uogólnienia twierdzenia Orlicza-Pettisa formułowane były i są często właśnie w języku miar. Dzisiaj wiadomo, że twierdzenie Orlicza-Pettisa pozostaje prawdziwe w klasach przestrzeni lokalnie wypukłych i niektórych typach F-przestrzeni nielokalnie wypukłych (np. w F-przestrzeniach z bazą Schaudera). Znane są przykłady F-przestrzeni, w których twierdzenie Orlicza-Pettisa nie zachodzi (M. Nawrocki, 1987, 1990).

Orlicza zajmowało też zagadnienie związków między zbieżnościami podszeregowymi dla innych par topologii niż słaba i normowa i to niekoniecznie zadanych na przestrzeni Banacha (taką naturalną parę tworzą np. w F-przestrzeniach funkcji mierzalnych, topologia zbieżności wg miary i oryginalna topologia metryczna). Twierdzenia typu Orlicza-Pettisa formułowane są dla szeregów w grupach topologicznych. Najbardziej znane uogólnienia w tym kierunku zostały dokonane przez N. J. Kaltona, który pokazał, że w przypadku topologicznych grup polskich podszeregowa zbieżność w dowolnej słabszej topologii grupowej pociąga taką zbieżność w topologii oryginalnej. Warto dodać, że wyniki Kaltona zostały w istotny sposób rozszerzone m.in. przez Lecha Drewnowskiego i Iwo Labudę, uczniów Profesora. W ostatnich latach opublikowali oni ponadto warianty twierdzenia Orlicza-Pettisa dla szerokich klas topologicznych krat liniowych.

Orlicz zauważył równoważność warunków

1° $\sum_1^\infty |x^*(x_n)| < \infty$ dla dowolnego ciągłego funkcjonału liniowego x^*,

2° $\{\sum_{n\in F} x_n : F \subset \mathbb{N},\ F$ skończony$\}$ jest zbiorem ograniczonym.

Tak więc warunek występujący w pierwotnej wersji twierdzenia Orlicza-Pettisa okazuje się być równoważnym warunkowi nieodwołującemu się do przestrzeni dualnej. Szereg $\sum_1^\infty x_n$ z ograniczonym zbiorem wszystkich skończonych sum swoich wyrazów nazwał Orlicz *doskonale ograniczonym* (obecnie, w odniesieniu do przestrzeni Banacha mówi się: „(x_n) jest słabo bezwarunkowo Cauchy'ego"). Orlicz interesował się przez wiele lat *przestrzeniami* (również nielokalnie wypukłymi) *z własnością* (O), *tzn. takimi przestrzeniami, w których szereg doskonale ograniczony jest podszeregowo zbieżny.* Twierdzenie Orlicza-Pettisa pokazuje, że ciągowo słabo zupełne przestrzenie Banacha mają własność (O). Innymi przykładami przestrzeni z tej klasy wskazanymi przez Orlicza są przestrzenie Musielaka-Orlicza z normą porządkowo ciągłą (w tym przestrzenie L^p dla $0 < p < 1$ i przestrzeń $L^0[0,1]$ funkcji Lebesgue'a mierzalnych z topologią zbieżności wg miary). Czesław Bessaga i Aleksander Pełczyński pokazali w roku 1958, iż przestrzeń Banacha ma własność (O), wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni c_0. Powyższa charakteryzacja pozostaje prawdziwa dla ciągowo zupełnych przestrzeni lokalnie pseudowypukłych oraz dla bardzo szerokiej rodziny topologicznych krat liniowych (niedawne wyniki L. Drewnowskiego i I. Labudy).

Innym, klasycznym już dzisiaj twierdzeniem autorstwa Orlicza jest następujący wynik z roku 1933:

Twierdzenie (Orlicz, 1933). *Jeżeli szereg $\sum_1^\infty x_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w $L^p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$, to $\sum_1^\infty \|x_n\|^{max(2,p)} < \infty$.*

Przestrzenie Banacha, w których dla każdego szeregu bezwarunkowo zbieżnego $\sum_1^\infty x_n$ zachodzi $\sum_1^\infty \|x_n\|^2 < \infty$ nazwano *przestrzeniami z własnością Orlicza.* Mają ją oczywiście przestrzenie L^p dla $1 \leqslant p \leqslant 2$, a ogólniej przestrzenie Banacha kotypu 2. Dość długo nie było wiadomo, czy własność Orlicza danej przestrzeni X implikuje, że jest ona kotypu 2. T. Figiel i G. Pisier pokazali prawdziwość tej implikacji przy założeniu izomorficzności X z sumą prostą tejże przestrzeni w sensie ℓ^p dla pewnego

$p \in [1,2]$. W latach 1992 i 1994 M. Talagrand wskazał kraty Banacha (w tym przestrzeń symetryczną) z własnością Orlicza, ale kotypu różnego od dwójki.

Związek bezwarunkowej zbieżności szeregu $\sum_1^\infty x_n$ i jego absolutnej zbieżności (tj. zbieżności szeregu $\sum_1^\infty \|x_n\|$) interesował Orlicza już w końcu lat dwudziestych. Wpisał on, wraz ze S. Mazurem, do Księgi Szkockiej pytanie (nr 122) o istnienie w dowolnej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru szeregu bezwarunkowo zbieżnego i równocześnie absolutnie rozbieżnego. Odpowiedź pozytywną dali w 1950 roku A. Dvoretzky i C. R. Rogers.

Orlicz miał znaczące osiągnięcia w badaniach szeregów funkcyjnych, a zwłaszcza szeregów ortogonalnych, które stanowiły temat jego rozpraw doktorskiej i habilitacyjnej [22]. Mówiąc ,,szereg ortogonalny" ma się na myśli szereg $\sum_1^\infty \varphi_n(\cdot)$ funkcji mierzalnych $\varphi_n(\cdot)$ określonych na $(0,1)$ tworzących układ ortonormalny, tzn. spełniających warunek $\int_0^1 \varphi_k(s)\varphi_m(s)ds = \delta_{km}$. Do powszechnie znanych i często przytaczanych twierdzeń autorstwa Orlicza należą m.in. twierdzenia o mnożnikach Weyla dla bezwarunkowej zbieżności oraz o osobliwościach Carlemana i Littlewooda układów ortogonalnych, zamieszczone w pracach [2], [15], [21] i [28]. On też jako pierwszy podał warunek dostateczny bezwarunkowej zbieżności szeregu postaci $\sum_1^\infty a_n\varphi_n(\cdot)$.

Twierdzenie Orlicza o mnożnikach Weyla (1927). *Niech (a_k) będzie ustalonym ciągiem liczbowym. Jeżeli istnieje rosnący do nieskończoności ciąg liczbowy (w_k) taki, że dla pewnego podciągu (w_{k_n}) mamy*

$$\sum_1^\infty \frac{1}{w_{k_n}} < \infty, \quad \sup_k \frac{\log k_{n+1}}{\log k_n} < \infty \quad \textit{oraz} \quad \sum_1^\infty a_k^2 (\log k)^2 w_k < \infty,$$

to $\sum_1^\infty a_k\varphi_k(x)$ jest bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie.

Rezultaty K. Tandori'ego (1962) pokazały, że założenia przyjęte w powyższym twierdzeniu są niemal optymalne.

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Carlemana. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest dowolnym nieskończonym układem ortonormalnym funkcji wspólnie ograniczonych, to istnieje funkcja ciągła, której współczynniki Fouriera a_n względem tego układu spełniają warunek $\sum_1^\infty |a_n||p_n| = \infty$. W szczególności istnieje funkcja ciągła o własności $\sum_1^\infty |a_n|^{2-\varepsilon} = \infty$ dla każdego $\varepsilon > 0$.*

Twierdzenie Orlicza o osobliwościach Littlewooda. *Jeżeli $\sum_1^\infty p_n^2 = \infty$ oraz φ_n jest nieskończonym układem ortogonalnym, złożonym ze wspólnie ograniczonych funkcji ciągłych, gęstym w $C[0,1]$, to dla prawie wszystkich układów znaków ± 1 szereg $\sum_1^\infty \pm p_n\varphi_n(x)$ nie jest rozwinięciem żadnej funkcji z $L^1[0,1]$.*

Orlicz pokazał ponadto, że *dla dowolnego zupełnego układu ortogonalnego $(\varphi_n(\cdot))_{n=1}^\infty$ na $(0,1)$ mamy $\sum_1^\infty \varphi_n^2(s) = \infty$ dla prawie wszystkich s.*

Inny kierunek zainteresowań Orlicza to badanie własności zbioru ciągów będących współczynnikami Fouriera (względem ustalonego układu ortogonalnego) funkcji należących do danej przestrzeni.

Wielką wartość i znaczenie prac Orlicza nad szeregami funkcyjnymi podkreślają w komentarzach Kashin i Saakjan [KS84]. Czynią to także R. S. Gutjer i P. L. Uljanov, których obszerny artykuł przeglądowy wzbogacił rosyjskie tłumaczenie książki Kaczmarza i Steinhausa [KS58]. Wielokrotnie do wyników Orlicza odwołują się również Kaczmarz i Steinhaus w książce *Theorie der Orthogonalreihen* [KS58] i Sikorski w książce [Si59].

Zacytujmy na koniec monografie bądź ważne prace o szeregach i bezwarunkowej zbieżności w przestrzeniach Banacha (alfabetycznie): Diestel [D84], Diestel i Uhl [DU77], Drewnowski [D00], Filter i Labuda [FL91], Kaczmarz i Steinhaus [KS58], M. I. Kadets i V. M. Kadets [KK97], Kalton [K80], Kashin i Saakjan [KS84], Sikorski [S59], Uljanov [U78], Wojtaszczyk [W91].

C. Przestrzenie F-unormowane i przestrzenie Saksa

Władysław Orlicz zajmował się również ogólną teorią przestrzeni F-unormowanych (=metryzowalnych przestrzeni liniowo-topologicznych). Współpracując ze Stanisławem Mazurem uzyskał wyniki o fundamentalnym znaczeniu dla tej teorii. Do najznamienitszych należy przeniesienie *zasady jednostajnej ograniczoności* (= twierdzenie Banacha–Steinhausa) na rodziny operatorów odwzorowujących F-przestrzenie (= zupełne przestrzenie F-unormowane) w przestrzenie F-unormowane. Zasada jednostajnej ograniczoności, w takim właśnie stopniu ogólności, udowodniona została w artykule [20] dla ciągów operatorów. Jej sformułowanie jest następujące:

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1933) lub zasady jednostajnej ograniczoności w przestrzeniach F-unormowanych:

Jeżeli $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ *są ciągłymi operatorami liniowymi z F-przestrzeni* X *do przestrzeni F-unormowanej* Y *oraz zbiór* $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony w* Y *dla dowolnego* $x \in X$*, to operatory* T_n *są jednakowo ciągłe. Gdy ponadto ciąg* (T_n) *jest punktowo zbieżny, to operator graniczny jest ciągły.*

Zasada jednostajnej ograniczoności jest dzisiaj zwykle formułowana dla dowolnej rodziny operatorów (T_α) w postaci równoważności: punktowa ograniczoność $\Leftrightarrow$ jednakowa ciągłość (implikację $\Leftarrow$ łatwo jest zauważyć).

W pracy [20] opublikowano po raz pierwszy, pochodzący od Banacha, warunek równoważny ograniczoności podzbioru A przestrzeni F-unormowanej: $t_n a_n \to 0$ dla dowolnych ciągów $(a_n) \subset A,\ t_n \to 0$. Wykazano również klasyczne dzisiaj twierdzenie:

Twierdzenie o rezonansie (Mazur-Orlicz, 1933). *Jeżeli ciąg* (T_n) *ciągłych operatorów działających między F-przestrzeniami* X, Y *jest taki, że:*

(i) $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony dla wszystkich* $x \in X$*,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *istnieje dla elementów* x *pewnego zbioru liniowo gęstego w* X*,*

to $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ *istnieje dla wszystkich* $x \in X$ *oraz operator* T *jest liniowy i ciągły.*

Przytoczone powyżej twierdzenia, często opatrzone komentarzem podkreślającym ich znaczenie, znajdują się w każdej monografii i podręczniku poświęconym analizie funkcjonalnej. Komentarzy takich nie brakuje i w, używając medialnego żargonu, ,,kultowej" monografii Dunforda i Schwartza [DS58], gdzie odnotowano ogólny wariant *zasady zagęszczania osobliwości* wykazany przez Orlicza w [25]:

Zasada zagęszczania osobliwości (Orlicz, 1935). *Niech* $T_{nm}(\cdot, \alpha)$ *oznacza ciąg podwójny ciągłych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha zależny od parametru* α *przebiegającego zupełną przestrzeń metryczną* A *i taki, że* $T_{nm}(x, \cdot)$ *są funkcjami ciągłymi przy każdym* $x \in X$*.*

Jeżeli dla dowolnego α *nie istnieje* $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} T_{nm}(x_\alpha, \alpha)$ *dla jakiegoś* $x_\alpha \in X$*, to przy pewnym* $x \in X$ *granica ta nie istnieje również dla* α *należących do pewnego zbioru drugiej kategorii w* A*. Co więcej, zbiór elementów* $x \in X$ *o powyższej własności jest rezydualny w* X*.*

Idee Mazura i Orlicza zainspirowały liczne dalsze badania kontynuowane m.in. przez Andrzeja Alexiewicza w [A49-51], pierwszego doktoranta Profesora Orlicza. Wiele szczegółów o kierunkach i rozwoju tych badań oraz wskazówek literaturowych znaleźć można u Drewnowskiego [D96], a także u Antosika i Swartza [AS85] oraz Swartza [Sw90] i [Sw96].

Mazur i Orlicz przyczynili się znacząco do rozwoju teorii przestrzeni Frécheta (= lokalnie wypukłych F-przestrzeni), które określane były przez nich jako przestrzenie B_0. Tematykę tę podjęli już w latach trzydziestych w związku z analizowaniem pól zbieżności metod sumowalności, ale wiele istotnych wyników ukazało się drukiem dopiero po drugiej wojnie światowej w pracach [47] i [56], wielokrotnie potem cytowanych. Opóźniona prezentacja tych rezultatów spowodowała, że niektóre z nich zostały niezależnie opublikowane przez innych matematyków (J. Dieudoneé, L. Schwartz). Artykuły [47] i [56] zawierają: ważne przykłady F-przestrzeni, które nie są normowalne (a nawet lokalnie wypukłe), warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego na loklanie wypukłej przestrzeni F-unormowanej, uogólnienie twierdzenia Hahna-Banacha. Ów warunek równoważny ciągłości funkcjonału liniowego f ma postać $|f(x)| \leqslant K_{f,n}\, p_n(x)$, gdzie stała $K_{f,n}$ zależy od f i p_n, a p_n jest pewnym wyrazem ciągu półnorm (p_j) zadającego topologię lokalnie wypukłą przestrzeni F-unormowanej. Mazur i Orlicz pokazali też uniwersalność przestrzeni $C(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ (z topologią wprowadzoną przez rodzinę półnorm $p_n(f) = \sup\{|f(t)| : |t| \leqslant n\}$) w klasie lokalnie wypukłych ośrodkowych F-przestrzeni — każda taka przestrzeń jest liniowo homeomorficzna z pewną podprzestrzenią w $C(\mathbb{R})$.

W pracy [56] znajduje się ponadto wariant zasady jednostajnej ograniczoności dla odwzorowań między przestrzeniami liniowymi Z z aksjomatycznie wprowadzoną zbieżnością. Jednym z tych aksjomatów był warunek

$$u_n \to 0 \text{ w } Z \Longrightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} u_{n_k}\right)_{m=1}^{\infty} \text{ zbieżny w } Z \text{ dla pewnego podciągu } (n_k).$$

Zbieżność spełniająca powyższą implikację nazwana została później K-zbieżnością i była z dużym powodzeniem badana przez matematyków katowickich (informacje na ten temat znajdują się u Antosika i Swartza [AS85]).

Znaczącym, ze względu na zastosowania, jest podane w [56] uogólnienie twierdzenie Hahna-Banacha. Uogólnienie to ma następującą postać:

Twierdzenie Mazura-Orlicza o nierównościach (1953) jako uogólnienie twierdzenie Hahna-Banacha:

Niech $\omega : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem subliniowym na rzeczywistej przestrzeni liniowej X oraz niech $u : T \to X$ i $\alpha : T \to \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami. Na to by istniał w X funkcjonał liniowy f taki, że

$$f(x) \leqslant \omega(x) \text{ dla każdego } x \in X, \quad \alpha(t) \leqslant f(u(t)) \text{ dla każdego } t \in T,$$

potrzeba i wystarcza aby nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha(t_k) \leqslant \omega\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(t_k)\right)$$

zachodziły dla dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in T$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnijmy, że przez funkcjonał subliniowy ω rozumie się funkcjonał subaddytywny i dodatnio jednorodny: $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$, $\omega(tx) = t\omega(x)$ dla $t \geqslant 0$.

Twierdzenie Mazura-Orlicza o nierównościach bywa formułowane w postaci równoważnej, określanej jako ,,twierdzenie o kanapce":

> *Jeżeli subliniowy funkcjonał ω na rzeczywistej przestrzeni liniowej X dominuje wklęsły funkcjonał ρ na wypukłym zbiorze $K \subset X$, tzn. $\rho(x) \leqslant \omega(x)$ dla $x \in K$, to wtedy istnieje funkcjonał liniowy f na X taki, że $\rho(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in K$ oraz $f(x) \leqslant \omega(x)$ dla $x \in X$.*

Oryginalny dowód twierdzenia o nierównościach jest skomplikowany i mało przejrzysty. Uproszczone dowody podali m.in. R. Sikorski (1953), V. Ptak (1956), S. Simmons (1968) i wielu innych autorów wskazujących na prawdziwość tezy również w sytuacjach ogólniejszych (półgrupy przemienne, stożki) od rozpatrywanej przez Mazura i Orlicza. Użyli oni swojego twierdzenia o nierównościach do wykazania: istnienia szczególnych typów całek, twierdzeń o oddzielaniu zbiorów wypukłych, możliwości rozkładu funkcjonałów na nieujemne komponenty, twierdzeń o istnieniu rozwiązań nierówności $T(x) \geq y$, gdzie T jest ciągłym operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha lub przestrzeniami Frécheta, a $\geqslant$ relacją zadaną przez stożek. O kierunkach uogólnień twierdzenia Mazura-Orlicza o nierównościach i jego dalszych zastosowaniach informują monografie Alexiewicz [A69], Fuchssteiner i Lusky [FS81], König i Neumann [KN86, Rozdział II], Peressini [P67], a także prace Köthe [K94] i Neumann [Ne91].

Orlicz, mimo osobistego uczestnictwa w fundamentalnych pracach Szkoly Lwowskiej i ogromnej wiedzy, nie zdecydował się na napisanie monografii z zakresu analizy funkcjonalnej. Jak już było opisane, Orlicz goszcząc w Instytucie Matematycznym Academia Sinica w Pekinie — był to rok 1958 — przedstawił po niemiecku cykl wykładów na temat liniowej analizy funkcjonalnej. Wykłady te zostały przetłumaczone (przez profesorów Guan Zhao Zhi i Li Wen Qing) i wydane pieć lat później w języku chińskim [K3], a po kolejnych niemal trzydziestu latach przetłumaczono tę publikację na angielski [K4]. Uczynił to profesor Lee Peng Yee z Narodowego Uniwersytetu w Singapurze. Tak powstała książka *Linear Functional Analysis* zawierająca klasyczne elementy teorii przestrzeni Banacha i przestrzeni F-unormowanych oraz wiele niestandardowych przykładów i niebanalnych zastosowań metod analizy funkcjonalnej do rozwiązania problemów np. teorii sumowalności czy teorii funkcji. Kilka takich problemów zostało zaatakowanych przez Orlicza z wykorzystaniem metod *teorii przestrzeni Saksa*, które wprowadził on w 1950 roku w pracy [49]. Jeżeli $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|^*$ są odpowiednio taką normą i F-normą na przestrzeni liniowej X, że kula jednostkowa $B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jest zupełna w topologii $\tau(\|\cdot\|^*)$ F-normy $\|\cdot\|^*$, to trójkę $X_s = (B, \|\cdot\|, \|\cdot\|^*)$ nazywa się przestrzenią Saksa (naturalnym przykładem, rozważanym w latach trzydziestych przez G. M. Fichtenholza, jest przestrzeń Saksa wyznaczona przez $L^\infty(0,1)$ z normami supremum istotnego i całkową). Orlicz skupiał swoje badania m.in. na poszukiwaniu warunków zapewniających ciągłość operatora T z $(X_s, \tau(\|\cdot\|^*))$ w przestrzeń Banacha lub Frécheta, jednakową ciągłość rodziny takich operatorów, reprezentacji funkcjonałów na X_s. Problematyka ta podjęta została w pracach: [49], [67], [70 - 72], [138]. Przestrzenie Saksa pozostają w ścisłym związku z teorią przestrzeni dwunormowych rozwiniętych m.in. przez Andrzeja Alexiewicza (patrz Cooper [Co78], Drewnowski [D96], Jach [J95], Semadeni [Se80]).

Monografie o przestrzeniach F-unormowanych i przestrzeniach Saksa (chronologicznie): Dunford i Schwartz [DS58], Peressini [P67], Alexiewicz [A69], Rolewicz [R84], Musielak [Mu76], Cooper [Co78], Kalton, Peck i Roberts [KPR].

D. Teoria sumowalności

Przypomnijmy pewne pojęcia z teorii sumowalności. Nieskończona macierz rzeczywista (lub zespolona) $A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \ldots$ określa *metodę sumowalności* następująco: ciąg $x = (x_n)$ jest A-*sumowalny* jeżeli wszystkie szeregi $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ są zbieżne i istnieje $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Niech c_A będzie polem zbieżności (polem sumowalności) metody A, tzn. c_A jest przestrzenią liniową wszystkich A-sumowalnych ciągów x. Gdy każdy ciąg zbieżny $x = (x_n)$ jest A-sumowalny, to metodę A nazywa się *zachowawczą*, a gdy dodatkowo $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} x_n$ to metodę A określa się jako *regularną*. Znane są dokładne charakteryzacje metod zachowawczych i regularnych (twierdzenia Silvermana-Toeplitza z roku 1913 i Kojimy-Schura z roku 1921). Ponadto mówi się, że metody A i B są *zgodne*, gdy $\lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} B_n x$ dla każdego $x \in c_A \cap c_B$.

Orlicz rozpoczął swoją działalność naukową w 1926 roku pracą [1]. Wykazał tam, że jeśli H jest macierzą Cesáro-Höldera oraz dla metody regularnej A zachodzi $c_H \subset c_A$, to metody H i A są zgodne.

Pierwszymi, którzy zastosowli metody analizy funkcjonalnej do teorii sumowalności byli S. Mazur (1930) i S. Banach (1932). Wielką skuteczność tych metod w odniesieniu do problemów sumowalności pokazali Mazur i Orlicz przedstawiając bardzo wartościowe wyniki (m.in. twierdzenie o ograniczonej zgodności — bounded consistency theorem) w artykule [19] z 1933 roku, który nie zawierał jednak dowodów. Zostały one opublikowane w późniejszej pracy [61] w roku 1954. Największy oddźwięk zyskało

Twierdzenie Mazura-Orlicza o zgodności ([19], [61]). *Jeżeli każdy ciąg ograniczony sumowalny metodą regularną A jest sumowalny metodą regularną B, to obie metody są zgodne dla ciągów ograniczonych tzn. sumują ciągi ograniczone do tej samej granicy.*

Twierdzenie Mazura-Orlicza, określane w literaturze anglojęzycznej jako *Bounded Consistency Theorem* uważane jest za fundamentalne dla teorii sumowalności (W. H. Ruckle w pracy [Ru79] pisze: *The Bounded Consistency Theorem is a principal result of summability theory. Indeed, it holds a claim to a second position in the theory just after the Silverman-Toeplitz Theorem*). Było one udowadniane na wiele sposobów (patrz Brudno [Br45], Zeller [Ze58], Zeller i Beekmann [ZB70], Ruckle [Ru79], Snyder i Wilansky [SW80] i Wilansky [Wy84]). Autorem jednego z dowodów (liczącego kilka stron niełatwych rachunków), podanego w 1945 roku, był A. L. Brudno [Br45]. W związku z tym faktem mówi się niekiedy o twierdzeniu Brudno-Mazura-Orlicza zamiast Bounded Consistency Theorem (porównaj np. Jakimovski i Livne [JL71]). Oryginalny dowód twierdzenia Mazura-Orlicza o zgodności został uproszczony przez Orlicza w [67], a w sposób krótki, elegancki i elementarny pokazali je Snyder i Wilansky w [SW80]. Z kolei N. A. Davydov [Da72] wykazał, że twierdzenie o zgodności nie jest prawdziwe dla ciągów nieograniczonych (nie można go wzmocnić nawet o jeden ciąg nieograniczony). Boos i Leiger w [BL89] podali listę 53 prac o tym twierdzeniu i jego uogólnieniach.

Niezwykle ważną obserwacją dokonaną przez Mazura i Orlicza w roku 1933 było spostrzeżenie, że przestrzenie Banacha nie są odpowiednim narzędziem metodycznym do badań pól sumowalności, natomiast wiele można uzyskać angażując metody przestrzeni Frécheta. Bardzo użyteczną okazuje się ośrodkowa topologia liniowa na c_A wprowadzona przez rodzinę półnorm

$$p(x) = \sup_n |\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k|, \; p_n(x) = \sup_m |\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k|, \; q_n(x) = |x_n|, \; n = 1, 2, \ldots.$$

Temat pracy [61] to przede wszystkim zagadnienia zgodności metod sumowalności, rzędów wzrostu ciągów z pola sumowalności i istnienia nieograniczonych ciągów w polu sumowalności.

Problematyka podjęta przez Mazura i Orlicza w [19] i [61] znalazła znaczną liczbę kontynuatorów, głównie za granicą (R. P. Agnew, A. L. Brudno, V. M. Darewsky, A. Wilansky, K. Zeller). Każda monografia poświęcona teorii sumowalności opublikowana po roku 1950 odwołuje się do wyników Mazura i Orlicza oceniając je niezwykle wysoko (np. K. Zeller we wstepie do swojej monografii [Ze58] pisze: ... *układ książki jest w sposób istotny wyznaczony przez fundamentalne funkcjonalno-teoretyczne badania S. Mazura i W. Orlicza*).

Idee zawarte w [19], [61] i w [66] zostały później rozwinięte i zastosowane przez Alexiewicza i Orlicza m.in. do wykazania twierdzeń o zgodności dla ograniczonych ciągów podwójnych i ciągu operatorów [65], [83] (patrz też [82]). Twierdzenia uzyskano w oparciu o metody teorii przestrzeni dwunormowych.

Problematyka sumowalności pojawiała się w pracach Orlicza także w następnych okresach w związku z badaniem przestrzeni Saksa i przestrzeni modularnych [71], [76], [79], [103], [105].

Monografie z teorii sumowalności (chronologicznie): Cooke [C50], Zeller [Ze58], Petersen [Pe66], Zeller i Beekmann [ZB70], Wilansky [Wi84].

E. Funkcjonały ortogonalnie addytywne, przestrzenie modularne i przestrzenie Musielaka-Orlicza

Współpraca Orlicza z Lechem Drewnowskim zaowocowała w końcu lat sześćdziesiątych cyklem prac poświęconych reprezentacji funkcjonałów ortogonalnie addytywnych określonych na ideałach w przestrzeniach funkcji mierzalnych, tj. podkratach X w przestrzeni $L^0(S, \Sigma, \mu)$ funkcji Σ-mierzalnych spełniających warunek: jeżeli $g \in X$ oraz $|f(s)| \leqslant |g(s)|$ μ-prawie wszędzie, to $f \in X$. O funkcjonale $\lambda : X \to \mathbb{R}$ mówi się, że jest *ortogonalnie addytywny* i $b\mu - \mu$ ciągły, gdy $\lambda(f + g) = \lambda(f) + \lambda(g)$ o ile $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\}) = 0$ oraz $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ o ile $f_n \to f$ wg miary μ i $|f_n|, |f| \leqslant |g|$ dla pewnej funkcji $g \in X$. Przy tak ogólnych założeniach Drewnowski i Orlicz uzyskali całkową reprezentację funkcjonału λ ortogonalnie addytywnego i $b\mu - -\mu$ ciągłego, a mianowicie

$$\lambda(f) = \int_S \varphi(f(s), s) d\mu, \tag{6}$$

gdzie φ jest funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego. Jednym z wniosków wynikających z powyższej postaci funkcjonału λ jest twierdzenie o tym, że operator $b\mu - -\mu$ ciągły $T : X \to L^0(S, \Sigma, \mu)$ spełniający dodatkowo warunek $(T(f))\chi_A = (T(f\chi_A))\chi_A$ dla każdego zbioru $A \in \Sigma$ (χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A) jest operatorem kompozycji, tzn. $(T(f))(s) = \varphi(f(s), s)$ μ prawie wszędzie, gdzie i tutaj φ jest pewną funkcją spełniającą warunki typu Carathéodory'ego.

Innym szerzej wykorzystywanym twierdzeniem reprezentacyjnym autorstwa Drewnowskiego i Orlicza jest wynik o postaci modularu ortogonalnie addytywnego ϱ zadanego na podkracie $X \subset L^0(S, \Sigma\, \mu)$, która zawierając funkcję f, zawiera też iloczyn $f\chi_A$ dla dowolnego $A \in \Sigma$. Przez modular ortogonalnie addytywny rozumie się funkcję $\varrho : X \to [0, \infty]$ spełniającą cztery warunki:

(ϱ_A) $\quad \varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

(ϱ_B) $\quad |f| \leqslant |g| \Rightarrow \varrho(f) \leqslant \varrho(g)$,

(ϱ_C) $\quad 0 \leqslant f_n \nearrow f \Rightarrow \varrho(f_n) \nearrow \varrho(f)$,

(ϱ_D) $\quad \varrho(f + g) = \varrho(f) + \varrho(g)$ gdy $\mu(\{s : f(s)g(s) \neq 0\} = 0$.

Okazuje się, że modular ϱ jest także postaci (7) przy czym jeśli miara μ jest dodatkowo bezatomowa oraz $\varrho(f) = \varrho(g)$ dla jednakowo mierzalnych funkcji $f, g \in X$ oraz $\chi_S \in X$, to funkcja φ reprezentująca ϱ jest funkcją jednej zmiennej: $\varrho(f) = \int_S \varphi(f(s)) d\mu$.

Twierdzenie o reprezentacji modularów ortogonalnie addytywnych odgrywa kluczową rolę w badaniach *krat Orlicza* — abstrakcyjnych odpowiedników przestrzeni Musielaka-Orlicza. Kraty Orlicza, wprowadzone przez W. J. Classa, A. C. Zaanena i W. Wnuka, są naturalnym rozszerzeniem AL^p-przestrzeni F. Bohnenblusta będących abstrakcyjnymi odpowiednikami przestrzeni L^p. Całkowa postać modularu ortogonalnie addytywnego została użyta przez N. J. Kaltona i L. Drewnowskiego do wykazania twierdzenia o faktoryzacji operatorów AM-zwartych, określonych na ideałach z normą porządkowo ciągłą, zawartych w przestrzeniach Orlicza i Musielaka-Orlicza.

Orlicz rozwijał teorię przestrzeni modularnych, zapoczątkową przez Hidegoro Nakano w książkach *Modulared Semi-ordered Linear Spaces* i *Topology and Topological Linear Spaces* [Na51].

Uzyskał on szereg wyników dotyczących własności typu Fatou i Levi'ego w kratach liniowych z funkcjonałem ϱ, spełniającym warunki $(\varrho 1), (\varrho 2)$ oraz warunek $\varrho(f \vee g) \leqslant \varrho(f) + \varrho(g)$ dla $f, g \geqslant 0$.

Współpracując z Julianem Musielakiem zauważył, że funkcjonał zwany też **modularem w sensie Musielaka-Orlicza** ϱ, określony na rzeczywistej przestrzeni liniowej X i mający własności:

$(\varrho 1)$ $\quad \varrho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$(\varrho 2)$ $\quad \varrho(-x) = \varrho(x),$

$(\varrho 3)$ $\quad \varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \varrho(x) + \varrho(y), \quad \text{dla} \quad \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1,$

$(\varrho 4)$ $\quad \varrho(tx) \to 0 \quad \text{gdy} \quad t \to 0,$

definiuje na X F-normę równością

$$\|x\|_\varrho = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\}, \tag{7}$$

przy czym $\|x_n\|_\varrho \to 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla wszystkich $t > 0$. Równość (7) jest przeniesieniem na przypadek ogólnych przestrzeni liniowych pomysłu Mazura i Orlicza, którzy w pracy [78] tak właśnie wprowadzili topologię metryczną w przestrzeniach Orlicza generowanych przez niewypukłe funkcje Orlicza (w roli modularu występuje wtedy oczywiście funkcjonał $\int_S \varphi(|f(s)|)d\mu$).

Orlicz rozważał oprócz zbieżności w sensie F-normy $\|\cdot\|_\varrho$ tzw. *zbieżność modularną* przyjmując, że $x_n \xrightarrow{\varrho} 0$, gdy $\varrho(tx_n) \to 0$ dla pewnego $t > 0$. Zbieżność modularna nie jest na ogół topologiczna (tzn. nie można zadać topologii τ na X w taki sposób, aby $x_n \xrightarrow{\varrho} 0 \ \Leftrightarrow \ x_n \xrightarrow{\tau} 0$). Bywa ona jednak przydatna w zagadnieniach aproksymacyjnych (np. funkcje klasy C_0^∞ nie muszą być F-normowo gęste w przestrzeni Orlicza-Sobolewa, ale każda funkcja z tej przestrzeni jest granicą, w sensie zbieżności modularnej, ciągu funkcji klasy C_0^∞).

Orlicz zajmował się również przypadkiem modularów s-wypukłych ($0 < s \leq 1$), tzn. w miejsce aksjomatu $(\varrho 3)$ przyjmował warunek

$$\varrho(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha^s \varrho(x) + \beta^s \varrho(y) \text{ dla } \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha^s + \beta^s = 1. \tag{8}$$

Jak wykazano w pracy [98] modular s-wypukły ϱ definiuje normę s-jednorodną (= s-normę) wzorem

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf\{\varepsilon > 0 : \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon^{1/s}}\right) \leqslant 1\}.$$

Co więcej, czego także dowiódł Orlicz w [97], zachodzi równość

$$\|x\|_{s\varrho} = \inf_{t>0} \max\,(t^{-s}, t^{-s}\varrho(tx)).$$

Powyższa s-norma jest równoważna s-normie

$$\|x\|_{s\varrho}^0 = \inf_{t>0}(t^{-s} + t^{-s}\varrho(tx)),$$

która dla $s = 1$ jest tzw. normą Amemiya, dobrze znaną w teorii przestrzeni modularnych Nakano.

Odnotujmy, że funkcje *s-wypukłe w sensie Orlicza*, tzn. spełniające (8), zdobywają sobie popularność po artykule Hudzika i Maligrandy [HM94] z 1994 roku.

Ważną klasą przestrzeni modularnych są *przestrzenie Musielaka-Orlicza* zwane też *przestrzeniami Orlicza z parametrem*, zdefiniowane w pracy Musielaka i Orlicza [MO59] z 1959 roku:

$$L^\varphi(\mu) = \{x : \int_\Omega \varphi(\lambda|x(t)|,\, t)d\mu < \infty \,\text{dla pewnego}\, \lambda > 0 \ \text{zależnego od}\, x\},$$

gdzie funkcja dwóch zmiennych $\varphi : [0, \infty] \times \Omega \to [0, \infty]$ spełnia pewne konieczne założenia. Przestrzenie te w przypadku funkcji $\varphi(u, t)$ wypukłej w zmiennej u powinny nazywać się przestrzeniami Nakano lub przestrzeniami Nakano-Orlicza, gdyż pojawiły się już u Nakano [Na50] w 1950 roku. Przykładowo, Šragin pisał właśnie w [Sr67] *przestrzenie Orlicza-Nakano*. Specjalny przypadek tych przestrzeni tzn. gdy $\varphi(u, t) = u^{p(t)}$ nosi właśnie nazwę przestrzeni Nakano (lub przestrzeni L^p z parametrem lub ,,zmiennych przestrzeni L^p"), choć te z kolei przestrzenie, zarówno w przypadku funkcyjnym jak i ciągowym, rozważał Orlicz [10] już w 1931 roku.

W badaniu przestrzeni Musielaka-Orlicza, a szczególnie geometrii kuli, wiele rezultatów uzyskali Henryk Hudzik i Anna Kamińska. Zacytujmy ich kilka ważnych prac o przestrzeniach Musielaka-Orlicza: [H83], [H85], [Ka81], [Ka82] i [Ka83] (dokładny opis badań można znaleźć w ich wspólnej pracy przeglądowej [HKM]). Przestrzenie te były i są nadal badane w całym świecie. Wspomnijmy niektórych badaczy tych przestrzeni (alfabetycznie): G. Alherk, S. Chen, Y. Cui, S. Dhompongsa, L. Drewnowski, X. Fan, F. L. Hernández, Y. Hui, J. E. Jamison, A. Kasperski, P. Kolwicz, W. Kowalewski, W. Kurc, T. Landes, G. Lewicki, R. Maleev, M. Nawrocki, V. Peirats, R. Płuciennik, B. Rodriguez-Salinas, C. Ruiz, S. Saejung, Z. Shi, I. V. Shragin, K. Urbanik, T. Wang, M. Wisła, W. Wnuk, M. Wójtowicz, C. Wu, Z. Zbąszyniak, B. Zlatanov.

Odnotujmy też, że badania w przestrzeniach Nakano są ostatnio bardzo popularne. Bada się w nich np. ograniczoność operatora maksymalnego i innych klasycznych operatorów (L. Diening, D. Cruz-Uribe, D. E. Edmunds, X. Fan, A. Fiorenza, P. Hästö, A. Yu. Karlovich, V. Kokilashvili, T. Kopaliani, A. K. Lerner, A. Nekvinda, C. Pérez, L. Pick, M. Ružička, S. Samko). Pamiętać trzeba, że w dowodach potrzebne są nowe techniki, gdyż przestrzenie te nie są symetryczne (funkcje równomierzalne mogą mieć różne normy).

Teoria przestrzeni modularnych pozwalała na objęcie wspólną metodyką badań klas przestrzeni dość od siebie pod różnymi względami odległych (np. przestrzeni Musielaka-Orlicza i przestrzeni funkcji o skończonej φ-wariacji). Jednak teoria ta, mimo wielokierunkowych badań, nie przyniosła istotnego postępu w ,,rozpracowywaniu" F-przestrzeni czy ogólniej przestrzeni liniowo-topologicznych.

Monografie z przestrzeni modularnych to (chronologicznie): Nakano [Na50], Musielak [Mu78], [Mu83], Wnuk [Wn84].

F. Operatory wielomianowe i analityczne

W latach trzydziestych, po stworzeniu zasadniczych zrębów liniowej analizy funkcjonalnej, podjęto we Lwowie pewne próby zbudowania nieliniowej analizy funkcjonalnej. Owocem tych wysiłków były prace J. Schaudera (m. in. twierdzenie o punkcie stałym) oraz prace Mazura i Orlicza o operatorach wielomianowych. Wcześniej operatory wielomianowe rozważali m. in. M. Fréchet, A. D. Michal, R. S. Martin, T. Hildebrandt, F. Leja.

Prace Mazura i Orlicza [23], [26], [29], [30], [32] mają charakter pionierski. W pracy [23] bada się trzy równoważne definicje funkcji i operatorów wielomianowych.

Operator $U_m : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami liniowo-topologicznymi, nazywa się *wielomianem jednorodnym stopnia* m jeżeli U_m jest obcięciem do przekątnej operatora m-liniowego, tzn. $U_m(x) = U_m^*(x, x, ..., x)$, gdzie $U_m^* : X^m \to Y$ jest operatorem m-liniowym. Operator $P : X \to Y$ jest *operatorem wielomianowym stopnia* n jeżeli jest sumą skończonej liczby operatorów wielomianowych jednorodnych, tzn.

$$P(x) = U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x),$$

gdzie każdy U_m jest albo wielomianem jednorodnym stopnia m lub operatorem zerowym dla $0 \leqslant m \leqslant n$. Inne równoważne definicje operatorów wielomianowych podane przez Mazura i Orlicza są następujące:

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n, gdy

$$\Delta_h^{n+1} P(x) = 0 \quad \text{dla } x, h \in X,$$

gdzie różnice Δ_h^{n+1} określa się indukcyjnie w zwykły sposób,

— operator $P : X \to Y$ jest operatorem wielomianowym stopnia n jeżeli dla każdego $x, h \in X$ i każdej liczby t

$$P(x+th) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x,h)t^k,$$

gdzie $a_k(x,h) \in Y$ są niezależne od t.

W dyskusji nad różnymi definicjami Mazur i Orlicz posłużyli się tzw. formą biegunową. Wykazali oni mianowicie, że jeżeli U_k jest operatorem jednorodnym stopnia k, to odpowiadający mu symetryczny operator k-liniowy jest wyznaczony jednoznacznie; ten operator nazywa się operatorem generującym lub *formą biegunową*.

Wzór biegunowy Mazura-Orlicza (1935) jako uogólnienie wzoru $2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$:

$$P_k^*(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=0,1} (-1)^{k-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_k)} P_k(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k).$$

Główny rezultat w [26] to przeniesienie twierdzenia Banacha-Steinhausa o ciągach operatorów liniowych na przypadek operatorów wielomianowych o jednostajnie ograniczonych stopniach. Autorzy wykazali następujący fakt:

Twierdzenie Mazura-Orlicza ([26]). *Jeżeli P_n jest ciągiem ciągłych operatorów wielomianowych stopnia $\leqslant N$ z F-przestrzeni X do przestrzeni F-unormowanej Y oraz jeżeli $\{x \in X : \{P_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ jest ograniczony$\}$ jest zbiorem drugiej kategorii Baire'a w X, to ciąg $(P_n(x))$ jest jednakowo ciagły w $x = 0$. W konsekwencji, jeżeli $P_n(x) \to P(x)$ dla każdego $x \in X$ to P jest operatorem wielomianowym.*

W dwóch notach [30] i [32], opublikowanych w Sprawozdaniach Akademii Paryskiej w 1936 roku, Mazur i Orlicz podali szereg twierdzeń o podzielności funkcjonałów wielomianowych oraz twierdzenia o funkcjonałach wymiernych. Oni również postawili kilka problemów w *Księdze Szkockiej* (Mauldin [Ma81], problemy 20.1, 56, 73, 74) zwiaząnych z operatorami wielomianowymi. Problem 73 to pytanie:

Czy jeśli c_n jest najmniejszą stałą o własności, że dla dowolnego symetrycznego operatora n-liniowego F między przestrzeniami unormowanymi mamy

$$\sup_{\|x_i\|\leqslant 1, i=1,\dots,n} \|F(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant c_n \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|F(x, \dots, x)\|,$$

to $c_n = \frac{n^n}{n!}$?.

Problem ten został rozwiązany pozytywnie, a dokładne omówienie można znaleźć w komentarzu do Problemu 73 w *The Scottish Book* (Mauldin [Ma81]).

Operatory wielomianowe sa najprostszymi funkcjami analitycznymi między przestrzeniami Banacha. Ponadto są one używane do konstruowania innych operatorów analitycznych (przez rozwijanie w szereg wielomianów jednorodnych). Naturalnymi dziedzinami istnienia analitycznych odwzorowań są dziedziny w przestrzeniach zespolonych. Z drugiej strony, w wielu zastosowaniach analizy funkcjonalnej operatory analityczne w rzeczywistych przestrzeniach Banacha grają też istotną rolę. Dlatego w dwóch pracach Orlicza [50], [59] — wspólnych z A. Alexiewiczem — przenosi się dobrze znaną w zespolonych przestrzeniach Banacha teorię na przypadek rzeczywistych przestrzeni Banacha. Dla przykładu, w pracy [59] wykazuje się:

Twierdzenie Alexiewicza-Orlicza (1953). *Słaba i mocna analityczność w rzeczywistych przestrzeniach Banacha są równoważne.*

Wyniki Mazura i Orlicza oraz Alexiewicza i Orlicza są cytowane w monografiach Dineen [Di81], Hille [Hi48], Hille i Philips [HP57]. Wyniki te stały się przedmiotem dalszych badań wielu matematyków, m. in. Lelonga [Le70], [Le71], Bochnaka i Siciaka [BS71], Turpina [Tu76] i Dineena [Di81]. Monografia Dineena [Di81] zawiera pełną bibliografię dotyczącą operatorów wielomianowych i operacji analitycznych wraz z interesującymi komentarzami.

G. Funkcje wektorowe: mierzalność, różniczkowanie i analityczność

W kilku pracach Orlicz badał funkcje wektorowe. Zajmował się on różniczkowalnością i całkowalnością funkcji wektorowych, kasyfikacją słabą i mocną w odniesieniu do ciągłości, skończonej warjacji, klas Baire'a i pochodnych.

Praca [46], napisana wspólnie z A. Alexiewiczem, dotyczy klas Baire'a funkcji wektorowych. W szczególności udowodniono tam, że funkcja o przeciwdziedzinie ośrodkowej, odwzorowująca przestrzeń metryczną w przestrzeń Banacha X, słabo ciągła ze względu na pewien fundamentalny zbiór ciągłych funkcjonałów liniowych nad X, jest pierwszej klasy Baire'a i wynik przenosi się na klasy Baire'a wyższych rzędów.

W pracy [47], wspólniej z Mazurem, z 1948 roku wykazano (por. też Rolewicz [Ro84], str. 121-122):

Twierdzenie Mazura-Orlicza (1948). *Niech X będzie F-przestrzenią. Każda funkcja ciągła $f : [0,1] \to X$ jest całkowalna w sensie Riemanna, wtedy i tylko wtedy, gdy X jest lokalnie wypukła.*

W pracy [51], wspólniej z A. Alexiewiczem, Orlicz badał zagadnienia całkowalności w sensie Riemanna funkcji $f : [0,1] \to X$. Podali oni przykład funkcji $f : [0,1] \to C[0,1]$ całkowalnej w sensie Riemanna, która nie jest słabo ciągła w żadnym punkcie tego przedziału. Wykazali też, że ani słaba całkowalność ani słaba ciągłość funkcji nie implikuje całkowalności w sensie Riemanna.

W pracy [53] (również wspólnej z A. Alexiewiczem) przedstawiają oni charakteryzacje zbiorów, w których funkcje wektorowe są różniczkowalne. Metoda kategorii pozwoliła na udowodnienie następującego faktu:

Twierdzenie (Alexiewicz-Orlicz, 1952). *Niech X i Y będą rzeczywistymi ośrodkowymi przestrzeniami Banacha oraz U dowolnym niepustym otwartym podzbiorem w X. Jeżeli $F : U \to Y$ jest ciągła i różniczkowalna dla każdego $h \in X$ i $x \in U$ tzn. $\lim_{t\to 0} \frac{F(x+th)-F(x)}{t} = \delta F(x,h)$ istnieje, to $\delta F(x,h)$ jest liniowa i ciągła względem h dla każdego $x \in U$ z wyjątkiem pewnego zbioru A pierwszej kategorii tzn. F jest ciągła Gâteaux różniczkowalna w $U \setminus A$).*

W 2005 roku Corbacho, Plichko i Tarieladze [CPT05] przypominają ten rezultat (istnieje ogromna literatura odnośnie różniczkowania między przestrzeniami Banacha lub ogólniejszymi, ale tylko książka Yamamuro [Ya74] cytuje tę pracę, ale nie ten rezultat !). Autorzy uogólniają twierdzenie Alexiewicza-Orlicza na przestrzenie liniowo-topologiczne i również na pochodne jednostronne.

W pracy [53] Alexiewicz i Orlicz konstruują też operator nierozszerzający (tzn. operator Lipschitza ze stałą 1) $T : c_0 \to c_0$ taki, że T ma wszędzie ciągłą względem x i h pochodną Gâteaux, ale nie ma w żadnym punkcie pochodnej Frecheta. Przykład ten cytuje Nashed w [Nas71] na str. 123.

Ponadto, w kolejnej wspólnej pracy [60], Alexiewicz i Orlicz zauważają, że każda funkcja analityczna na rzeczywistej przestrzeni lokalnie wypukłej ma lokalne przedłużenie do zespolono-analitycznej funkcji na kompleksyfikacji tej przestrzeni. Powyższe ich rozważania pojawiły się ponownie u Muñoza, Sarantopoulosa i Tonge [MST99] przy badaniu kompleksyfikacji rzeczywistych przestrzeni Banacha, wielomianów i odwzorowań wieloliniowych.

W pracy z Matuszewską [135], Orlicz rozważał wektorowe twierdzenie Riesza-Fischera oraz wektorowe analogony nierówności Bessela i równości Parsevala.

W pracach [152], [159], wspólnych z S. Szuflą, badają oni istnienie wektorowych rozwiązań pewnych równań całkowych w przestrzeniach Banacha.

Wyniki Mazura i Orlicza oraz Alexiewicza i Orlicza są cytowane w monografiach Rolewicza [Ro84] i Yamamuro [Ya74]. Były też przedmiotem dalszych badań wielu matematyków.

H. Indeksy Matuszewskiej-Orlicza

W 1960 roku Matuszewska i Orlicz [91] zdefiniowali liczby charakteryzujące wzrost funkcji Orlicza φ i nazwali je *indeksami* funkcji φ. Dla $\lambda > 0$ niech

$$k_\varphi^a(\lambda) = \sup_{u>0} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}\ ,\ k_\varphi^\infty(\lambda) = \limsup_{u\to\infty} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}\ ,\ k_\varphi^0(\lambda) = \limsup_{u\to 0^+} \frac{\varphi(\lambda u)}{\varphi(u)}$$

oraz

$$s_\varphi^i = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\ln k_\varphi^i(\lambda)}{\ln\lambda}\ ,\ \sigma_\varphi^i = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\ln k_\varphi^i(\lambda)}{\ln\lambda}$$

dla $i = a, \infty, 0$.

Powyższe granice istnieją dla każdej funkcji Orlicza φ, chociaż mogą być nieskończone (kładziemy $\ln\infty = \infty$). Zachodzą nierowności

$$0 \leqslant s_\varphi^i \leqslant \sigma_\varphi^i \leqslant \infty, \quad i = a, \infty, 0,$$

i dlatego granice $s_\varphi^a, s_\varphi^\infty, s_\varphi^0$ nazywają się *dolnymi indeksmi Matuszewskiej-Orlicza*, a granice $\sigma_\varphi^a, \sigma_\varphi^\infty, \sigma_\varphi^0$ *górnymi indeksami Matuszewskiej-Orlicza*. Powyższe trzy rodzaje indeksów mają związek z przestrzeniami Orlicza $L^\varphi = L^\varphi(\Omega, \Sigma, \mu)$ generowanymi przez funkcje φ nad trzema zasadniczymi przestrzeniami miary: μ nieatomowa i nieskończona, μ nieatomowa i skończona oraz μ miara licząca na $\Omega = \mathbb{N}$. W przypadku gdy $\varphi(u) = u^p,\ p > 0$, to wszystkie indeksy są równe p, natomiast gdy $\varphi(u) = u^p \ln(1+u)$, to $s_\varphi^a = s_\varphi^\infty = \sigma_\varphi^\infty = p$ oraz $\sigma_\varphi^a = s_\varphi^0 = \sigma_\varphi^0 = p+1$. Istotne znaczenie tych indeksów polega na tym, że pozwalają one uogólnić pojęcie wykładnika sprzężonego, gdyż zachodzą równości

$$\frac{1}{s_{\varphi^*}} + \frac{1}{\sigma_\varphi} = \frac{1}{s_\varphi} + \frac{1}{\sigma_{\varphi^*}} = 1$$

(T. Ando 1960, W. Matuszewska 1961).

W pracach [91], [96], [111] Władysław Orlicz i Wanda Matuszewska badali indeksy wykazując następujące własności:

1. *Indeksy Matuszewskiej-Orlicza są niezmiennicze ze względu na równoważność tzn. jeżeli* $\varphi_1 \overset{i}{\sim} \varphi_2$ *to* $s_{\varphi_1}^i = s_{\varphi_2}^i$ *oraz* $\sigma_{\varphi_1}^i = \sigma_{\varphi_2}^i$*, dla* $i = a, \infty, 0$.

2. *Jeżeli* $\sigma_\varphi^\infty > 0$ *to dla każdego* $0 < s < s_\varphi^\infty$ *mamy* $\varphi \overset{\infty}{\approx} \chi_s$*, gdzie* $\chi_s(u) = \psi(u^s)$ *oraz* ψ *jest wypukłą funkcją Orlicza. Jezeli* $0 < s < \sigma_\varphi^\infty < \infty$*, to istnieje analogiczna reprezentacja z wklęsłą funkcją* ψ *— ten ostatni warunek jest równoważny z warunkiem* Δ_2 *dla dużych* u.

Indeksy Matuszewskiej-Orlicza znalazły zastosowanie przy badaniu przestrzeni Orlicza. I tak: Orlicz w [96] wykazał, iż $L^\varphi(0,1)$ jest lokalnie ograniczona, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_\varphi^\infty > 0$, T. Ando w 1962 roku dowiódł, że gdy $s_{\varphi_1}^\infty > \sigma_{\varphi_2}^\infty$, to każdy operator całkowy z $L^{\varphi_1}(0,1)$ do $L^{\varphi_2}(0,1)$ jest zwarty, Lindenstrauss i Tzafriri w 1972 roku udowodnili, że ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$ jest izomorficzna z podprzestrzenią ośrodkowej ciągowej przestrzeni Orlicza ℓ^φ, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \in [s_\varphi^0, \sigma_\varphi^0]$ oraz, że każdy liniowy ograniczony operator z ośrodkowej przestrzeni ℓ^{φ_1} do ośrodkowej ℓ^{φ_2} jest zwarty, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_{\varphi_1}^0 > \sigma_{\varphi_2}^0$.

Znane są też zastosowania indeksów przy badaniu ograniczoności operatorów całkowych, funkcji maksymalnych, operatorów singularnych w zwykłych lub wagowych przestrzeniach Orlicza. Przykładowo, klasyczny maksymalny operator Hardy-Littlewooda M jest ograniczony w $L^\varphi(\mathbb{R}^n)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $s_\varphi^a > 1$ (G. G. Lorentz 1955, T. Shimogaki 1965, D. Gallardo 1988). Więcej informacji o tych rezultatach można znaleźć w książce Kokilashvili i Krbec [KK91] oraz Kufner, Maligranda i Persson [KMP07].

Indeksy występują również w uogólnieniu twierdzeń interpolacyjnych typu Marcinkiewicza na przestrzenie Orlicza, choć założenia na φ są często formułowane w terminach nierówności całkowych (A. Zygmund 1956, E. M. Semenov 1968, D. W. Boyd 1969, M. Zippin 1971, A. Torchinsky 1976, L. Maligranda 1984, A. Cianchi 1998; patrz ponadto Torchinsky [To76], Maligranda [Ma84]).

Indeksy Matuszewskiej-Orlicza stały się punktem wyjścia dla wprowadzenia podobnych charakterystyk liczbowych szerszych klas przestrzeni: przestrzeni symetrycznych (D. W. Boyd 1969) — w związku z problemami interpolacji operatorów, funkcyjnych przestrzeni Banacha (T. Shimogaki 1965 i J. Grobler 1975) — w związku z badaniem operatorów zwartych, krat Banacha (P. Dodds 1977).

Więcej informacji o indeksach i ich zastosowaniach można znaleźć w książkach Krein, Petunin i Semenov [KPS], Lindenstrauss i Tzafriri [LT79], Maligranda [Mal89], Johnson, Maurey, Schechtman i Tzafriri [JMST], Bingham, Goldie i Teugels [BGT89] oraz w pracy Maligrandy [Ma84].

I. Interpolacja operatorów

Operator $T : X \to X$ nazywa się *operatorem Lipschitza* w przestrzeni unormowanej X, jeżeli $T0 = 0$ oraz istnieje stała dodatnia M taka, że $\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$. Najmniejsza stała M jest normą Lipschitza operatora T i oznacza się ją przez $\|T\|_{Lip(X)}$. Niech X_0, X, X_1 będzie trójką przestrzeni Banacha, przy czym mamy ciągłe włożenia $X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0$. Jeżeli dowolny operator liniowy i ciągły (Lipschitza) $T : X_i \to X_i,\ i = 0, 1$ jest ciągły (Lipschitza) z X w X, to przestrzeń X nazywa się *interpolacyjną* między X_0 i X_1 dla operatorów liniowych (Lipschitza). Oczywiście jeśli X jest interpolacyjna dla operatorów Lipschitza to jest interpolacyjna dla operatorów liniowych.

W 1935 roku Orlicz [24] wykazał, że ośrodkowa przestrzeń Orlicza $L^\varphi[a, b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów liniowych. Wiele lat później, bo w 1954 roku, uzyskał rezultat dla wszystkich przestrzeni Orlicza i dla operatorów Lipschitza, a mianowicie:

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza ([63]). *Każda przestrzeń Orlicza $L^\varphi[a, b]$ jest interpolacyjna między $L^1[a, b]$ i $L^\infty[a, b]$ dla operatorów Lipschitza oraz*

$$\|T\|_{Lip\,(L^\varphi)} \leqslant \ max(\|T\|_{Lip\,(L^1)}, \|T\|_{Lip\,(L^\infty)}).$$

W orginalnym sformułowaniu twierdzenia, po prawej stronie nierówności występuje w miejsce 1 stała $C > 1$. Twierdzenie to było uogólniane na przypadek przestrzeni symetrycznych przez B. S. Mitjagina (1965), A. P. Calderóna (1966), T. Shimogaki'ego (1968), G. G. Lorentza i T. Shimogaki'ego (1969, 1971), G. I. Russu (1969), L. Maligrandę (1979, 1989, 1991). Problematyka tych uogólnień podejmowana jest w Krein, Petunin i Semenov [KPS], Bennett i Sharpley [BS88], Maligranda [Ma89], [Mal89], [Ma91].

W 1954 roku w pracy [62] Orlicz udowodnił również inne twierdzenie:

Twierdzenie interpolacyjne Orlicza ([62]). *Dla dowolnej rosnącej i wklęsłej funkcji w na $[0, \infty)$, przestrzeń funkcji lipschitzowskich $Lip\, w$ jest interpolacyjna między $C[a, b]$ i $Lip\, 1$ na $[a, b]$ dla operatorów liniowych (i dla pewnej klasy operatorów nieliniowych).*

Twierdzenie to nie zostało zauważone w literaturze, choć było pierwszym twierdzeniem interpolacyjnym wykraczającym poza przestrzenie Banacha funkcji mierzalnych. Analogiczne badania wiele lat później prowadzili R. O'Neil (1966), E. M. Semenov (1968) i J. Peetre (1969). Więcej o twierdzeniach interpolacyjnych typu Orlicza można znaleźć w pracach Maligrandy [Ma89] i [Ma91].

W pracy [144], wspólnej z Henrykiem Hudzikiem i Ryszardem Urbańskim, udowodnione zostało twierdzenie o interpolacji operatorów subliniowych w ciągowych przestrzeniach Musielaka-Orlicza. Wykazane zostało twierdzenie typu Riesza-Thorina przy użyciu metody trzech prostych dla funkcji subharmonicznych. Zaletą takich rozważań jest stała 4 lub 8 w oszacowaniu norm operatorów w zależności od przypadku rzeczywistego lub zespolonego. Bardziej ogólne twierdzenia o interpolacji przestrzeni Orlicza, bez zwracania specjalnej uwagi na najlepsze oszacowanie norm, były wykazane przez wielu autorów, a najważniejszy jest tu rezultat Ovchinnikova [Ov84]. Twierdzenia interpolacyjne dla przestrzeni Orlicza z możliwie najlepszymi szacowaniami stałej interpolacji można znaleźć w książkach Maligrandy [Ma89], Brudnyi i Krugljak [BK91], oraz pracy Karlovich i Maligranda [KM01].

Monografie z dziedziny interpolacji operatorów to (chronologicznie): Krein, Petunin i Semenov [KPS], Ovchinnikov [Ov84], Bennett i Sharpley [BS88], Maligranda [Mal89], Brudnyi i Krugljak [BK91].

J. Równania różniczkowe — twierdzenia generyczne

Zbiór A w przestrzeni metrycznej X nazywa sie zbiorem *I kategorii Baire'a* (chudym), jeżeli jest sumą przeliczalnej ilości zbiorów nigdziegęstych; zbiór jest nigdziegęsty (rzadki), jeżeli wnętrze domknięcia jest puste. Jeżeli zbiór A nie jest I kategorii Baire'a to nazywamy go zbiorem *II kategorii Baire'a*. Zbiór A jest *rezydualny*, jeśli jego dopełnienie jest zbiorem I kategorii. Czasami zamiast mówić, że zbiór jest rezydualny mówimy, że opisywana przez niego własność jest generyczna. Podstawą wszystkich rozważań jest klasyczne twierdzenie Baire'a: zupełna przestrzeń metryczna jest II kategorii. Każdy zbiór rezydualny w tej przestrzeni jest gęsty i II kategorii.

Odpowiedź na pytanie, czy w zbiorze X jakichś obiektów matematycznych istnieją obiekty o danej własności W, można często uzyskać stosując metodę kategorii Baire'a. Należy wyposażyć X w pewną metrykę zupełną i stwierdzić w niej rezydualność (generyczność) zbioru elementów o własności W. Tego rodzaju problematyka była przedmiotem zainteresowań Szkoły Lwowskiej już w latach trzydziestych. Powszechnie znane są twierdzenia S. Mazurkiewicza (1931) i S. Banacha (1931) o generyczności własności nieróżniczkowalności wszędzie w przestrzeni funkcji ciągłych $C[a,b]$. Pierwsze zastosowanie metody kategorii Baire'a w teorii równań różniczkowych podał Orlicz w 1932 roku. Rozważmy wszystkie funkcje f ciagłe i ograniczone w prostokącie $Q = [a,b] \times [c,d]$ lub $Q = [a,b] \times \mathbb{R}^n$. Klasyczne twierdzenie Peano informuje o istnieniu co najmniej jednego rozwiązania problemu Cauchy'ego

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Standardowym założeniem, gwarantującym jednoznaczność rozwiązania w Q, jest założenie, że f spełnia warunek Lipschitza. W przestrzeni Banacha $C(Q)$ z norma supremalną, zbiór funkcji spełniających warunek Lipschitza jest zbiorem I kategorii Baire'a i możnaby przypuszczać, że zbiór funkcji f, dla których (9) ma jednoznaczne rozwiązanie jest zbiorem I kategorii, ale jak wykazał właśnie Orlicz, zbiór ten jest zbiorem II kategorii Baire'a.

Twierdzenie Orlicza o kategoriach ([14]). *Zbiór funkcji f, dla których równanie* (9) *posiada jednoznaczne rozwiązanie, jest rezydualny w przestrzeni $C(Q)$.*

Mamy tutaj więc trochę paradoksalną sytuację, gdyż twierdzenie Orlicza pokazuje, iż praktycznie ,,wszystkie" równania różniczkowe mają jednoznaczne rozwiązania, bo te bez jednoznacznego rozwiązania stanowią zbiór chudy. Podobny rezultat dla problemu Darboux dotyczącego równań typu hiperbolicznego $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ został uzyskany przez Alexiewicza i Orlicza w [68].

Od lat siedemdziesiątych dał się zauważyć wyraźny wzrost zainteresowania problematyką generyczną w przestrzeniach nieskończonego wymiaru. Zapoczątkowała go praca Lasoty i Yorke'a [LY73], gdzie dowiedziono, że zbiór funkcji ciągłych f, dla których problem Cauchy'ego dla równania $x'(t) = f(t, x(t))$ w przestrzeni Banacha, posiada własność istnienia, jednoznaczności i ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych, jest zbiorem rezydualnym w przestrzeni funkcji ciągłych. Przypomnijmy, że problem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha X ma rozwiązanie dla dowolnej funkcji ciagłej f, wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończenie wymiarowa (A. N. Godunov 1975).

Dalsze twierdzeniach typu Orlicza o kategoriach (dotyczące własności punktów stałych dla odwzorowań nierozszerzających, zbieżności kolejnych przybliżeń, rozwiązań rozmaitych typów równań różniczkowych, równań funkcyjnych i różniczkowo-funkcyjnych) uzyskali m. in. G. J. Butler, F. S. De Blasi, T. Costello, T. Dominguez Benavides, M. Kisielewicz, M. Kwapisz, J. Myjak, G. Pianigiani, S. Szufla, G. Vidossich.

W latach 1979-1981 Orlicz powrócił do własności generycznych. W pracy [143], wspólnej ze Stanisławem Szuflą, wykazał, że zbieżność kolejnych przybliżeń dla równania $x = f(x)$ jest własnością generyczną ($f : C(K, X) \to C(K, X)$ oznacza funkcję ciągłą, a X jest przestrzenią Frécheta).

W artykule [149] badali oni generyczne własności istnienia, jednoznaczności i zbieżności ciągu aproksymacji nieskończonego układu równań całkowych typu Volterry w przestrzeniach Banacha. Dokładne omówienie powyższych rezultatów znajduje się w pracy Orlicza [150] oraz pracach Myjaka [My78] i [My80].

W kolejnych publikacjach [151] i [158], także wspólnych z S. Szuflą, podano warunki dostateczne istnienia rozwiązania całkowego równania Volterry

$$x(t) = p(t) + \int_0^t f(t, s, x(s))ds,$$

gdzie rozwiązanie x jest funkcją z $J = [0, a]$ do ośrodkowej przestrzeni Banacha X i należy do wektorowej przestrzeni Orlicza $L^\varphi(J, X)$. Następnie stwierdzili, że przy tych samych założeniach, zbiór wszystkich rozwiązań $x \in L^\varphi(J, X)$ jest kompaktem R_δ w sensie Aronszajna.

Monografie z równań różniczkowych zawierające twierdzenia kategoryjne to: Myjak [My80], Piccinini, Stampacchia i Vidossich [PSV].

K. Miara i całka. Funkcje rzeczywiste. Funkcje o skończonej wariacji

Władysław Orlicz był autorem szeregu prac dotyczących skończenie addytywnych miar wektorowych. Zajmował się w nich m.in. konstrukcją całki z funkcji skalarnej względem miary μ o wartościach w przestrzeni Banacha X ([116], [117], [119], [131]) oraz zagadnieniem absolutnej ciągłości (w różnych znaczeniach tego pojęcia) miary wektorowej względem subaddytywnych funkcji zbioru ([124], [126], [130]). Warto tu zwrócić uwagę na twierdzenie podane w [126], gdzie przedstawiono dość ogólną sytuację, w której absolutna ciągłość każdej ze skalarnych funkcji zbioru $x^*\mu$ względem subaddytywnej skalarnej funkcji zbioru η implikuje absolutną ciągłość μ względem η (x^* jest tu ciągłym funkcjonałem liniowym na X). Problematyce różnych funkcji zbioru, twierdzeniu Brooksa-Jewetta, poświęcone są ponadto artykuły [145], [146], [155].

Inne prace, [37], [40], [55], przygotowane w okresie wojennym, ale z oczywistych względów opublikowane dopiero po kilku latach, traktują o zagadnieniu istnienia nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych. Zastosowane tam metody dowodów, teoriomiarowe i kategoryjne, nawiązują do przedwojennych idei S. Banacha, S. Mazurkiewicza i H. Auerbacha. Rezultaty Orlicza zawarte w [37] są o tyle ciekawe, że są pośrednie między efektywnymi konstrukcjami nieróżniczkowalnych funkcji ciągłych a twierdzeniami egzystencjalnymi w rodzaju: w topologii normy supremalnej ciągłe funkcje różniczkowalne tworzą zbiór pierwszej kategorii Baire'a. Orlicz analizował różniczkowalność funkcji typu

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \quad f_\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n(x),$$

gdzie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest jednostajnie zbieżnym w pewnym przedziale szeregiem funkcji ciągłych, $\varepsilon_n \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ lub $\varepsilon_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, a $\varepsilon_n(t)$ oznaczają funkcje typu Rademachera. Sformułował on warunki, których spełnienie przez funkcje f_n i ich pochodne implikuje, że funkcje f_ε nie są różniczkowalne dla ciągów (ε_n) należących do pewnego zbioru drugiej kategorii, a funkcje $f_\varepsilon(x,t)$ nie są różniczkowalne dla prawie wszystkich t.

W publikacji [40] podane zostało rozwiązanie problemu S. Ruziewicza (wpisanego do Księgi Szkockiej pod numerem 57) dotyczącego istnienia funkcji spełniających jednocześnie warunek Lipschitza względem niemalejącej funkcji w_0 oraz warunek nieróżniczkowalności względem innej funkcji niemalejącej w_1. Orlicz podał warunek konieczny i dostateczny istnienia takiej funkcji wyrażający się pewną relacją między w_0 i w_1.

Twierdzenie Orlicza ([40]). *Niech w_0 i w_1 będą funkcjami niemalejącymi na $[0,\ell]$, o wartości zero jedynie w zerze i prawostronnie ciągłymi w punkcie 0. Na to by istniała ℓ-okresowa funkcja f na $\mathbb{R}$ spełniająca warunki:*

(1) $|f(x+h) - f(x)| \leqslant w_0(|h|)$ *dla wszystkich* $|h| \leqslant \ell$,

(1) $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/w_1(|h|) = +\infty$ *dla wszystkich* $x \in \mathbb{R}$,

potrzeba i wystarcza, by

$$\liminf_{h\to 0^+} \frac{w_1(h)}{h}\gamma(h) = 0, \text{ gdzie } \quad \gamma(h) = \sup_{0<k\leqslant h} \frac{k}{w_0(k)}.$$

Dostateczność została udowodniona przez efektywne skonstruowanie funkcji f. Z twierdzenia Orlicza otrzymujemy jako bezpośrednie konsekwencje nastepujące rezultaty:

— rezultat A. Zygmunda (1929) i S. Steckela (1929): istnieje okresowa funkcja f taka, że zachodzi (1) oraz $\limsup_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|/h = +\infty$ dla wszystkich x, wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{h\to 0} h/w_0(h) = 0$,

— jeżeli $s > 1$ to $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}\varphi(2^{sn^2}x)$ jest ciągła, nieróżniczkowalna, spełnia warunek Höldera dla $\gamma < 1/s$ i dla $\delta > 1/s$ $\limsup_{h\to 0^+} |f(x+h) - f(x)|/h^\delta = +\infty$ dla wszystkich x, przy czym φ jest niestałą funkcją spełniającą warunek Lipschitza.

Cytowane wyżej twierdzenie, opatrzone komentarzem, znaleźć można w książce van Rooij i Schikhof [RS82].

Analogicznym kwestiom poświęcona jest praca [55], gdzie zastąpiono granicę górną przez aproksymatywną granicę górną. Badania w tym zakresie kontynuował uczeń Orlicza, E. Tarnawski w połowie lat pięćdziesiątych.

Dla podziału $\pi: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ przedziału $[a, b]$, funkcji rzeczywistej x określonej na $[a, b]$ oraz funkcji Orlicza φ, przyjmujemy

$$\sigma_\varphi(x, \pi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|).$$

Jeżeli $v_\varphi(x) = \sup_\pi \sigma_\varphi(x, \pi) < \infty$, to mówimy, że x ma *ograniczoną (skończoną)* φ*-wariację* na $[a, b]$. Dla $\varphi(u) = u^p$ otrzymujemy w przypadku $p = 1$ klasyczną wariację Jordana, a dla $p \neq 1$ tzw. p-tą wariację wprowadzoną w 1924 roku przez N. Wienera, a wykorzystaną wkrótce przez J. Marcinkiewicza i L. C. Younga w teorii szeregów Fouriera i całki Riemanna-Stieltjesa. Natomiast pojęcie φ-wariacji pojawiło się już w 1937 roku w pracy Young [Yo37].

Funkcjonał $v_\varphi(\cdot)$ jest ważnym przykładem modularu. Związana z nim klasa $V_0^\varphi = \{x : v_\varphi(x) < \infty \text{ i } x(a) = 0\}$ oraz przestrzeń $V^\varphi = \{x : \lambda x \in V_0^\varphi \text{ dla pewnego } \lambda > 0\}$ była badana przez Musielaka i Orlicza w [80]. Zauważyli oni m.in., że równość $V_0^\varphi = V^\varphi$ równoważna jest spełnianiu przez φ warunku Δ_2 dla małych u oraz $V_0^{\varphi_1} \subset V_0^{\varphi_2}$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnych $C, u_0 > 0$ zachodzi $\varphi_2(u) \leqslant C\varphi_1(u)$ o ile $u \in [0, u_0]$. Oni też wykazali zupełność przestrzeni V^φ (generowanej przez wypukłą funkcję φ) względem normy będącej funkcjonałem Minkowskiego zbioru V_0^φ, a ponadto podali uogólnienie twierdzenia Helly'ego o wyrywaniu podciągu i rozszerzyli wyniki E. R. Love z 1951 roku dotyczące φ-absolutnej ciągłości.

W szczególnie ważnej roli *logarytmicznie wypukłe funkcje Orlicza* φ:

$$\varphi(u^\alpha v^\beta) \leqslant \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) \text{ dla } u, v, \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

wystąpiły w pracy [136], gdzie Leśniewicz i Orlicz badali warunki istnienia całki Riemanna–Stieltjesa $\int_a^b x(t)dy(t)$. Rozpatrywali oni szereg Younga

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right),$$

gdzie φ, ψ oznaczają ściśle rosnące funkcje Orlicza, i dowiedli dwóch implikacji wiążących zbieżność powyższego szeregu z indeksami Matuszewskiej–Orlicza funkcji φ, ψ:

$$\frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} > 1 \Rightarrow S < \infty, \quad \frac{1}{s_\varphi^0} + \frac{1}{s_\psi^0} < 1 \Rightarrow S = \infty.$$

Podali też dwa dowody twierdzenia Younga (patrz [Yo38]): *jeżeli* φ, ψ *są logarytmicznie wypukłymi, ściśle rosnącymi funkcjami Orlicza, dla których szereg Younga jest zbieżny oraz* $x \in V^\varphi$ *jest funkcją ciągłą, a* $y \in V^\psi$*, to całka Riemanna–Stieltjesa funkcji* x *względem* y *istnieje i ponadto*

$$\left|\int_a^b x(t)dy(t)\right| \leqslant \varphi^{-1}(v_\varphi(x))\psi^{-1}(v_\psi(y)) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(n^{-1}v_\varphi(x))\psi^{-1}(n^{-1}v_\psi(y)).$$

Leśniewicz i Orlicz zauważyli też, że założenie $S < \infty$ jest istotne, bo gdy $S = \infty$, funkcje φ, ψ i funkcje do nich sprzężone φ^*, ψ^* spełniają warunek Δ_2 dla małych u, to istnieją funkcje ciągłe $x \in V^\varphi, y \in V^\psi$, dla których całka $\int xdy$ nie istnieje. Rezultaty przedstawione w [136] były później uogólniane przez Schramma [Sc85] i Younga [Yo76]. Co więcej, zostały zamieszczone w książce Dudley i Norvaisa [DN99].

W cyklu dziesięciu artykułów Orlicza, napisanych wspólnie z Jarosławem Ciemnoczołowskim i Wandą Matuszewską ([152], [157], [161]–[163], [166], [168], [170], [171], [175]), badane były związki przestrzeni V^φ z różnymi innymi przestrzeniami funkcji (w tym z przestrzenią funkcji o skończonej wariacji w sensie Watermana), przedstawione zostało uogólnienie twierdzenia Marcinkiewicza z pracy [Mr34] oraz następujące rozszerzenie twierdzenia Rjazanova z [Rj68]: *jeżeli wypukła funkcja Orlicza* φ

spełnia warunek Δ_2 *dla wszystkich* u *i* $v_\varphi(x) < \infty$, *gdzie* x *jest funkcją okresową na* $\mathbb{R}$ *o okresie* 1, *to dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje zbiór domknięty* $A \subset [0,1]$ *taki, że* $|[0,1] \setminus A| < \varepsilon$ *a zawężenie* $x_{|A}$ *funkcji* x *do zbioru* A *spełnia warunek typu Höldera*: $\varphi(|x_{|A}(t) - x_{|A}(s)|) \leqslant K|t-s|$.

Jeżeli P_δ oznacza podział przedziału $[a,b]$ o średnicy co najwyżej δ, to funkcjonał

$$v_\varphi^\delta(x) = \sup_{P_\delta} \sigma_\varphi(x, P_\delta)$$

jest także modularem i to modularem wypukłym, gdy φ jest wypukłą funkcją Orlicza. Wyznacza on więc normę typu Luxemburga $\|x\|_\varphi^\delta = \inf\{\varepsilon > 0 : v_\varphi^\delta(x/\varepsilon) \leqslant 1\}$. Podprzestrzeń domknięta $V_1^\varphi \subset V^\varphi$ zdefiniowana jako $V_1^\varphi = \{x \in V^\varphi : \lim_{\delta\to 0^+} \|x\|_\varphi^\delta = 0\}$ ma ciekawe własności topologiczne — jest ośrodkowa, ale jej przestrzeń dualna jest nieośrodkowa, a jeśli dodatkowo funkcja sprzężona φ^* spełnia warunek Δ_2 dla małych u, to V_1^φ nie zawiera izomorficznej kopii przestrzeni ℓ^1. Fakty te zostały ustalone w [168]. Tym samym Orlicz rozszerzył wynik J. Lindenstraussa i C. Stegalla z 1975 roku, którzy wskazali po raz pierwszy na przestrzenie V_1^φ, wyznaczone przez wypukłe funkcje potęgowe φ, jako na przykład ośrodkowej przestrzeni Banacha bez kopii ℓ^1, z nieośrodkowym dualem. Uproszczenia rozumowań Lindenstraussa i Stegalla dokonał S. V. Kisliakov w [Ki84].

W pracy [170] znajduje się analiza własności funkcjonału v_φ oraz związki przestrzeni V^φ z przestrzeniami funkcji o skończonej wariacji w sensie Wienera (tzn. $v_\varphi^W(x) = \lim_{\delta\to 0^+} v_\varphi^\delta(x) < \infty$) i z przestrzeniami o skończonej wariacji w sensie Riesza tj. $r_\varphi(x) = \sup_P \varrho_\varphi(x) < \infty$, gdzie

$$\varrho_\varphi(x) = \sum_{k=1}^n \varphi(|x(t_k) - x(t_{k-1})|/(t_k - t_{k-1}))(t_k - t_{k-1}).$$

Pokazano tam m. in., że addytywność (subaddytywność) funkcjonału v_φ jako funkcji przedziału oznacza liniowość funkcji φ (równoważność funkcji φ z funkcją liniową) w pewnym otoczeniu zera. Ponadto Orlicz zauważył, iż w ogólności $v_\varphi^W(x) \leqslant v_\varphi(x)$, chociaż zawsze istnieją funkcje, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość, a w przypadku subaddytywnych funkcji φ mamy $v_\varphi^W(x) = v_\varphi(x)$ dla dowolnej funkcji x. W artykule [171] znaleźć też można warunki implikujące, dla absolutnie ciągłej funkcji x o skończonej wariacji w sensie Riesza, przynależność pochodnej x' do klasy Orlicza $L_0^\varphi[a,b]$, przy czym rozważane są przede wszystkim niewypukłe funkcje Orlicza φ (przypadek wypukłych funkcji φ badali wcześniej J. T. Medvedev w 1953 roku i K. U. Rzaev w 1976 roku).

Odnotować wypada również pracę [169] napisaną wspólnie z Lechem Maligrandą. Przyjmując $v_p = v_\varphi$ oraz $V^p = V^\varphi$, gdzie $p \in (0,\infty)$, $\varphi(u) = u^p$, Autorzy tejże pracy udowodnili submultiplikatywność funkcjonału v_p dla $p \in (0,1]$ (tj. $v_p(xy) \leqslant v_p(x)v_p(y)$) oraz nierówność

$$v_1(\psi(|x|)) \leqslant \psi(v_1(x)), \tag{10}$$

która zachodzi dla dowolnej wypukłej funkcji Orlicza ψ oraz dowolnej funkcji $x \in V^1$. Zauważyli oni ponadto, że V^ψ jest algebrą Banacha względem norm $\|\cdot\|_{L^\infty} + \|\cdot\|$ oraz $2\psi^{-1}(1)\|\cdot\|$ (norma $\|\cdot\|$ jest tu normą typu Luxemburga związaną z modularem v_ψ) i zwrócili uwagę na fakt wynikania z nierówności (10) dobrze znanej uogólnionej *nierówności Opiala*:

$$\int_a^b |x(t)|^p |x'(t)| dt \leqslant (b-a)^p (p+1)^{-1} \int_a^b |x'(t)|^{p+1} dt.$$

Dowody przedstawione w [169] oparte są na szeregu nierówności, które były później dokładniej analizowane i uogólniane przez Pečarića i Gusića [PG96] oraz Castillo i Trousselota [CT07].

Orlicza zajmowały ponadto operatory kompozycji działające między przestrzeniami typu V^φ. Przykładowo, w pracy [166] istotnie rozszerzył następujący rezultat M. Josephy ([Jo83], patrz również Appell i Zabrejko [AZ90]): *jeśli* φ, ψ *są funkcjami Orlicza spełniającymi warunek* Δ_2 *dla małych* u *oraz* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją przyjmującą wartość zero w punkcie zero, to operator superpozycji* $\mathbb{F}(x) = F(x(\cdot))$ *odwzorowuje* V^φ *w* V^ψ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $v > 0$ *istnieje taka stała* K_v, *że dla* $|t|, |s| \leqslant v$ *mamy* $\psi(|F(t) - F(s)|) \leqslant K_v \varphi(|t-s|)$. Założenie warunku Δ_2 w powyższym twierdzeniu może być opuszczone — zauważył to Prus-Wiśniowski w [PW89].

Monografie o funkcjach rzeczywistych i funkcjach o skończonej uogólnionej wariacji: van Rooij i Schikhof [RS82], Appell i Zabrejko [AZ90], Dudley i Norvaisa [DN99].