Dzieło naukowe Kazimierza Kuratowskiego

Kazimierz Kuratowski jest autorem 172 prac naukowych, dwóch monografii i dwóch podręczników akademickich. Napisał 35 artykułów o historii i organizacji matematyki w Polsce i w dwóch książkach zebrał wspomnienia z życia matematycznego i prywatnego. Był promotorem dziewięciu prac doktorskich: Stanisława Ulama (1933), Samuela Eilenberga (który był także uczniem Karola Borsuka) (1936), Romana Sikorskiego (1949), Jerzego Jaronia (1958), Stanisława Mrówki (1959), Ryszarda Engelkinga (1961), Moniki Całczyńskiej-Karłowicz (1966), Józefa Krasinkiewicza (1971) i Janusza Kaniewskiego (1977). Lista tych, którzy na jego wykładach, pracach i książkach uczyli się uprawiania matematyki i przedstawiania swoich wyników byłaby znacznie dłuższa. Pisał i mówił wyjątkowo precyzyjnie, zwięźle i prosto, z dyskretnym wdziękiem. Precyzja i zwięzłość wynikały z jasności jego umysłu oraz z nawyku ścisłego, logicznego myślenia. Prostotę osiągał dzięki głębokiej analizie i umiejętności docierania do sedna problemu. Wdzięk był jego tajemnicą, związaną zapewne z często przezeń przywoływaną analogią miedzy matematyką i muzyką oraz poezją. Wykłady wyraźnie sprawiały mu przyjemność, ich doskonałość zdawała się wypływać z natchnienia i naturalnej swobody. Wśród warszawskich studentów krążyło powiedzenie, że jego wykład przepisany z tablicy stanowiłby wzorowy podręcznik. I była to prawda, ale słuchacze nie wiedzieli, że ten podręcznik istniał – to były notatki profesora. Wszystko, co mówił było doskonale przygotowane i na ogół starannie spisane. Ci, którzy nie mieli szczęścia go słuchać, mogą poznać szczególny, osobisty styl jego wykładu obcując z dwutomową Topologią; ta mistrzowska synteza topologii ogólnej – dzieło życia wielkiego uczonego – wciąż pozostaje arcydziełem literatury matematycznej. Najważniejsze prace Kazimierza Kuratowskiego zostały zebrane w książce K. Kuratowski, Selected papers PWN 1988, zawierającej także omówienie całości jego dorobku naukowego ([11] i [27], liczby w klamrach odsyłają do części "Literatura"). Bardziej szczegółowe przedstawienie dorobku w dziedzinie topologii można znaleźć w [12]. Pisząc niniejsze opracowanie uznaliśmy za właściwe skoncentrowanie się na dokonaniach naukowych Kazimierza Kuratowskiego, które w naszym odczuciu miały największy wpływ na rozwój matematyki. Cytując prace Kuratowskiego, podajemy datę publikacji i kolejną literę, odsyłając do części "Lista publikacji".

1. Operacja domknięcia i Lemat Kuratowskiego-Zorna.

W roku 1922, w trzecim tomie Fundamenta Mathematicae ukazało się siedem prac Kuratowskiego. Wyniki dwóch z nich, [1922e] i [1922d], dotyczące podstaw topologii i teorii mnogości, weszły na trwałe do literatury z tych dziedzin.

Praca [1922e], stanowiąca część rozprawy doktorskiej Kuratowskiego przedstawionej w 1920r. w Uniwersytecie Warszawskim, zawiera cztery aksjomaty operacji domknięcia i opis, w terminach operacji domknięcia, podstawowych pojęć topologicznych. Aksjomaty Kuratowskiego zostały uznane w późniejszym okresie za jedną z najlepszych definicji przestrzeni topologicznych. Ich rola w kształtowaniu się współczesnego języka topologii jest ciekawie opisana w artykule G.H. Moore'a [23].

W pracy [1922d] Kuratowski rozpatruje funkcje F przyporządkowujące każdemu podzbiorowi X ustalonego zbioru E zawierający X zbiór $F(X) \subset E$ i pokazuje, że dla każdego $A \subset E$, wśród zawierających A jako element rodzin podzbiorów E, zamkniętych ze względu na działanie F oraz operację sumy dowolnej podrodziny, istnieje rodzina najmniejsza, która jest dobrze uporządkowana relacją inkluzji, a jej suma jest punktem stałym funkcji F.

Kuratowski wyprowadził z tego twierdzenia następującą zasadę maksimum (terminologia pojawiła się w późniejszej literaturze): jeśli $\mathcal{K}$ jest pewną rodziną podzbiorów ustalonego zbioru zamkniętą ze względu na sumy podrodzin dobrze uporządkowanych relacją inkluzji, to $\mathcal{K}$ zawiera element maksymalny ze względu na inkluzję.

W [1922d] pokazano, że odwołanie się do tej zasady pozwala wyeliminować indukcję pozaskończoną z dowodów szeregu ważnych twierdzeń w topologii i teorii funkcji rzeczywistych.

Zasadę maksimum dla rodzin podzbiorów ustalonego zbioru odkrył ponownie Max Zorn, publikując w 1935r. pracę, w której zastąpił tą zasadą (sformułowaną w nieco słabszej wersji niż u Kuratowskiego) szereg rozumowań algebraicznych, opartych na indukcji pozaskończonej. Zorn zapowiedział też, że w kolejnej pracy wykaże równoważność zasady maksimum z pewnikiem wyboru i zasadą dobrego uporządkowania, ale ostatecznie, takiego dowodu nie opublikował.

W roku 1939 Bourbaki pisał w kontekście zasady maksimum o "twierdzeniu Zorna" i wyprowadził z niej "lemat fundamentalny", który był odpowiednikiem (dla zbiorów częściowo uporządkowanych), twierdzenia Kuratowskiego o punkcie stałym (zob. [6]). Jednakże później przyznał priorytet w sformułowaniu tej zasady Kuratowskiemu (zob. [7]). Obecnie, w literaturze zasadę maksimum dla rodzin zbiorów często nazywa się Lematem Kuratowskiego-Zorna.

Interesujące informacje historyczne, związane z różnymi wariantami zasady maksimum w teorii mnogości, zawiera artykuł P.J. Campbella [8]. Znaczenie pracy Kuratowskiego [1922d] w teorii mnogości jest też ciekawie omówione w artykule A. Kanamori [17].

2. Continua nieprzywiedlne, rozcinanie płaszczyzny, jednosprzęgłość i charakteryzacja sfery dwuwymiarowej.

Continua nieprzywiedlne między dwoma punktami – minimalne continua łączące te punkty, zostały wprowadzone w roku 1909 przez L. Zorettiego w badaniach pojęcia linii. Wkrótce potem L.E.J. Brouwer pokazał, że continua nieprzywiedlne na płaszczyźnie mogą mieć bardzo złożoną strukturę, co przyciągnęło uwagę wielu wybitnych matematyków, w czasach formowania się topologii mnogościowej.

Druga część rozprawy doktorskiej Kuratowskiego [1922f] i jej kontynuacja

[1927c] zawierają głęboką analizę continuów nieprzywiedlnych. Głównym wynikiem tych prac, uzyskanym wspólnie z Bronisławem Knasterem w [1927c], jest twierdzenie o rozkładzie continuum nieprzywiedlnego na "warstwy fundamentalne" – "tranches fondamentales" (określenie "fondamentales" pojawiło się w późniejszej pracy Kuratowskiego [1928c]).

Warstwy fundamentalne continuum X to elementy maksymalne, w sensie inkluzji, w rodzinie podcontinuów X, które są przeliczalnymi sumami nietrywialnych continuów nierozkładalnych (tzn. nie dających się przedstawić w postaci sumy dwóch continuów, z których żadne nie zawiera się w drugim) lub brzegowych w X.

Kuratowski pokazuje w [1922f], że dla continuum X nieprzywiedlnego między punktami a i b, w rodzinie continuów w X zawierających a, które są domknięciami swoich wnętrz, uzupełnionej zbiorem pustym, inkluzja jest porządkiem liniowym mającym typ porządkowy pewnego zbioru domkniętego w [0,1]. Z tym liniowo uporządkowanym zbiorem continuów związane jest w [1927c] w naturalny sposób przekształcenie ciągłe z X na odcinek lub w punkt, którego warstwy są warstwami fundamentalnymi X.

To prowadzi do twierdzenia Knastera i Kuratowskiego, że dla continuum X nieprzywiedlnego między dwoma punktami, przestrzenią rozkładu półciągłego górnie X na warstwy fundamentalne jest albo odcinek albo punkt, przy czym spośród wszystkich takich "liniowych" rozkładów półciągłych górnie X na continua, rozkład na warstwy fundamentalne jest najsubtelniejszy.

Twierdzenie Knastera i Kuratowskiego znacznie wzmocniło wyniki H. Hahna, L. Vietorisa i W.A. Wilsona o "liniowych" rozkładach pewnych continuów nieprzywiedlnych. W szczególności, jeśli opisana w [1922f] liniowo uporządkowana rodzina continuów w continuum X nieprzywiedlnym między a i b ma typ odcinka, to warstwy fundamentalne X pokrywają się z wyróżnionymi przez Vietorisa "Schichten": dwa punkty z X leżą w tej samej warstwie fundamentalnej wtedy i tylko wtedy, gdy nie są porównywalne w relacji $p \prec q$ oznaczającej, że można połączyć a z p oraz b z q rozłącznymi continuami w X.

W pracy [1928c], Kuratowski dowodzi, że dla continuum X na płaszczyźnie, które jest wspólną granicą dwóch obszarów, przestrzeń rozkładu półciągłego górnie X na warstwy fundamentalne jest albo punktem, albo okręgiem, przy czym jest to rozkład najsubtelniejszy spośród "cyklicznych" rozkładów półciągłych górnie X na continua.

Inny niezwykle efektowny wynik z tej pracy orzeka, że continuum na płaszczyźnie, które jest wspólną granicą trzech obszarów jest albo nierozkładalne, albo też jest sumą dwóch continuów nierozkładalnych.

Ważnym pojęciem topologicznym, wyróżnionym niezależnie przez Kuratowskiego i Vietorisa w roku 1926 jest jednosprzęgłość continuum X, która oznacza, że jeśli X jest sumą dwóch continuów, to ich przecięcie jest spójne (nazwa "unicoherent" pojawiła się w jednej z późniejszych prac Kuratowskiego, Vietoris używał terminu "ohne Henkel").

Kuratowski pokazał w [1926b], że dla continuum peanowskiego X (tzn. ciągłego obrazu odcinka), jednosprzęgłość jest równoważna własności, którą Phragmén i Brouwer udowodnili dla sfery dwuwymiarowej: brzeg każdej składowej dopełnienia continuum w X jest continuum.

W pracy [1929a] (której wyniki były prezentowane na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Bolonii w 1928 r.), Kuratowski podaje piękną charakteryzację topologiczną sfery dwuwymiarowej S^2: continuum peanowskie X jest homeomorficzne z S^2 wtedy i tylko wtedy, gdy żaden punkt nie rozcina X oraz każde continuum niejednosprzęgłe w X rozcina X.

Continua peanowskie spełniające drugi z tych warunków nazywane są w [1929a] continuami Janiszewskiego, dla podkreślenia związków z podstawowymi wynikami Z. Janiszewskiego o rozcinaniu S^2.

Dowodząc homeomorficzności z S^2, Kuratowski pokazuje, że w przestrzeniach Janiszewskiego bez punktów rozcinających zachodzi twierdzenie Jordana oraz każdy punkt ma bazę otoczeń złożonych z obszarów o brzegach homeomorficznych z okręgiem, a następnie odwołuje się do topologicznej charakteryzacji S^2 otrzymanej trzy lata wcześniej przez Irmgard Gawehn.

3. Grafy niespłaszczalne.

Jednym z najczęściej cytowanych twierdzeń Kuratowskiego jest podana w [1930d] charakteryzacja grafów, które zanurzają się w płaszczyznę. Frank Harary opatrzył swoją monografię z teorii grafów [15] dedykacją-czterowierszem:

To Kazimir Kuratowski
Who gave K_5 and $K_{3,3}$
To those who thought planarity
Was nothing but topology

(zob. także [16]).

Graf K_5 to graf o pięciu wierzchołkach, którego każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią; wierzchołki grafu $K_{3,3}$ dzielą się na dwie trzyelementowe grupy, przy czym każdy wierzchołek z danej grupy łączy się krawędzią z każdym wierzchołkiem z drugiej grupy i nie łączy z żadnym wierzchołkiem ze swojej grupy.

Kuratowski udowodnił, że graf nie zanurza się w płaszczyznę wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera jeden z grafów K_5 lub $K_{3,3}$ (w [1930d], grafy K_5 i $K_{3,3}$ są opisane geometrycznie).

W istocie, Kuratowski pokazał więcej: że continuum peanowskie zawierające co najwyżej skończenie wiele topologicznych kopii okręgu i nie zanurzające się w płaszczyznę, zawiera topologicznie jeden z grafów K_5 lub $K_{3,3}$.

Kilka lat później, S. Claytor wykazał, że dowolne continuum peanowskie, które nie zanurza się w sferę dwuwymiarową, zawiera topologicznie K_5, $K_{3,3}$ lub jedną z dwóch krzywych opisanych przez Kuratowskiego w [1930d], w uwadze dotyczącej zakresu jego twierdzenia.

Interesujące informacje historyczne związane z twierdzeniem Kuratowskiego można znaleźć w pracy J.W. Kennedy'ego, L.V. Quintasa i M.M. Sysły [18].

4. Zbiory dwuspójne, przekształcenia w nerwy pokryć oraz parametryzacje, zanurzenia i uzwarcenia w teorii wymiaru.

Zbiory dwuspójne – zbiory spójne, które nie mają nietrywialnego rozkładu na dwa rozłączne zbiory spójne, były wyróżnione przez Knastera i Kuratowskiego we wnikliwym studium pojęcia spójności [1921d]. Jeden ze zbiorów dwuspójnych opisanych w [1921d] został zaliczony przez P.S. Aleksandrowa i B.A. Pasynkowa w ich monografii z teorii wymiaru [2] do "najznakomitszych przykładów w topologii teorio-mnogościowej".

Ten zbiór – miotełka Knastera-Kuratowskiego, powstaje przez dodanie punktu w nieskończoności do zbioru K punktów (x, y) na płaszczyźnie, gdzie x należy do zbioru Cantora C, $y \geq 0$ oraz y jest wymierne, jeśli x jest końcem przedziału przyległego do C i y jest niewymierne, w przeciwnym razie. Zbiór K nie zawiera nietrywialnych podzbiorów spójnych, ale miotełka $K \cup \{\infty\}$ jest spójna, a więc i dwuspójna.

Miotełka Knastera-Kuratowskiego inspirowała wiele konstrukcji w topologii ogólnej. Zbiory dwuspójne pojawiły się także nieoczekiwanie w badaniach dynamiki eksponenty w dziedzinie zespolonej: J.C. Mayer pokazał w 1990 r., że zbiór końców zbioru Julii dla przekształcenia $\left(\frac{1}{e}\right) e^z$ płaszczyzny zespolonej nie zawiera nietrywialnego zbioru spójnego, ale po dodaniu do niego punktu w nieskończoności otrzymuje się zbiór spójny (zob. [9]).

Ważnym wkładem Kuratowskiego do teorii wymiaru jest rozwinięcie metody kategorii Baire'a w odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych, wprowadzonej do tej dziedziny przez W. Hurewicza.

Wzmacniając pewne twierdzenie Hurewicza, Kuratowski pokazał w [1932c], że jeśli F jest zbiorem domkniętym n-wymiarowym, bez punktów izolowanych, w zwartej przestrzeni metrycznej X, to typowe, w sensie kategorii Baire'a, parametryzacje ciągłe X na zbiorze Cantora, mają w każdym punkcie krotność $\leq n+1$.

W pracach [1937d] i [1938d], Kuratowski pogłębia fundamentalne dla teorii wymiaru twierdzenia o zanurzaniu i uzwarcaniu dowodząc, że dla n-wymiarowej przestrzeni metrycznej ośrodkowej X, typowe w sensie kategorii Baire'a przekształcenie ciągłe $f : X \to [0,1]^{2n+1}$ przeprowadza X na zbiór o domknięciu n-wymiarowym, przy czym wymiar lokalny punktu $f(x)$ w przestrzeni $\overline{f(X)}$ jest równy wymiarowi lokalnemu x w X.

Podstawowym narzędziem w tych dwóch pracach są tzw. κ-przekształcenia w nerwy otwartych pokryć przestrzeni, wprowadzone niezależnie przez Hurewicza i Kuratowskiego w roku 1933. Wykorzystanie κ-przekształceń uprościło aproksymację przestrzeni topologicznych wielościanami, zapoczątkowaną w pracach P.S. Aleksandrowa i okazało się bardzo użyteczne w zagadnieniach przedłużania przekształceń ciągłych.

Jedno z takich twierdzeń o przedłużaniu orzekające, że każde przekształcenie ciągłe $f : A \to Y$ określone na domkniętym podzbiorze przestrzeni metrycznej ośrodkowej X ma ciągłe przedłużenie $f^* : X \to Y^*$, gdzie Y^* otrzymuje się przez dołączenie do Y wielościanu nieskończonego o wymiarze $\leq \dim(X \setminus A)$, udowodnił Kuratowski w [1935a].

5. Rzutowość powierzchni Lebesgue'a, związek operacji logicznych z deskryptywną złożonością zbiorów i twierdzenia o redukcji.

Podstawowymi obiektami badanymi w deskryptywnej teorii mnogości są zbiory borelowskie w kostce Hilberta $[0,1]^{\mathbb{N}}$, ich ciągłe obrazy – zbiory analityczne, dopełnienia zbiorów analitycznych w $[0,1]^{\mathbb{N}}$ – zbiory koanalityczne, oraz zbiory pojawiające się na kolejnych poziomach hierarchii rzutowej – ciągłe obrazy zbiorów koanalitycznych, ich dopełnienia w $[0,1]^{\mathbb{N}}$, itd.

Bardzo ważną rolę w rozwoju deskryptywnej teorii mnogości odegrała opublikowana przez H. Lebesgue'a w 1905 r. konstrukcja funkcji wielu zmiennych, parametryzująca funkcje rzeczywiste wszystkich klas Baire'a. N. Łuzin w swojej fundamentalnej monografii o zbiorach analitycznych [20] poświęcił wiele miejsca szczegółowej analizie funkcji Lebesgue'a, wyrażając przypuszczenie, że ze względu na indukcję pozaskończoną na której opiera się konstrukcja, wykres tej funkcji wychodzi poza hierarchię rzutową.

Jednakże, Kuratowski pokazał w niezwykle pomysłowej pracy [1936f], że nawet znacznie ogólniejsze konstrukcje przez indukcję pozaskończoną nie wyprowadzają poza klasę zbiorów rzutowych. W kolejnej, wspólnej z Johnem von Neumannem pracy [1937a], Kuratowski wykazał, że powierzchnia Lebesgue'a jest w istocie przecięciem zbioru analitycznego i koanalitycznego (nie będąc ani analityczna, ani koanalityczna).

Powstanie tych ważnych i efektownych prac opisał Kuratowski w "Notatkach do autobiografii" na str. 184-185.

Aby przedstawić twierdzenie Kuratowskiego i von Neumanna, oznaczmy przez $2^{\mathbb{Q}}$ przestrzeń funkcji $t : \mathbb{Q} \to \{0,1\}$ określonych na zbiorze liczb wymiernych, z topologią zbieżności punktowej (homeomorficzną ze zbiorem Cantora), niech WO będzie zbiorem funkcji $t \in 2^{\mathbb{Q}}$, których nośniki są dobrze uporządkowane i niech, dla $t \in WO$, $\bar{t}$ będzie liczbą porządkową, która jest typem porządkowym nośnika funkcji t. Zbiór WO jest koanalityczny.

Powierzchnię Lebesgue'a otrzymuje się prosto ze zbioru L, który powstaje w wyniku następującej konstrukcji. Ustalmy ciąg funkcji borelowskich $f_n : 2^{\mathbb{Q}} \to 2^{\mathbb{Q}}$, przekształcających WO w WO, przy czym $\overline{f_n(t)} < \bar{t}$, dla $t \in WO$ różnych od zera i $f_n(0) = 0$. Dla ustalonych przestrzeni metrycznych zupełnych i ośrodkowych X, Y, zbioru borelowskiego $A \subset X \times Y$ oraz ciągu funkcji borelowskich $g_n : X \to Y$ istnieje dokładnie jeden zbiór $L \subset WO \times X \times Y$(określony przez indukcję pozaskończoną ze względu na typ $\bar{t}$ nośnika funkcji $t \in WO$) taki, że sekcje $L(t,x) = \{y : (t,x,y) \in L\}$ spełniają następujące warunki: $L(0,x) = A(x)$

oraz $L(t,x) = \mathrm{Limsup_n}\, L(f_n(t), g_n(x))$.

Kuratowski i von Neumann udowodnili, że każdy taki zbiór L jest przecięciem pewnego zbioru analitycznego w $2^{\mathbb{Q}} \times X \times Y$ i zbioru koanalitycznego $WO \times X \times Y$.

Bardzo ważną rolę w rozwoju deskryptywnej teorii mnogości odegrała praca Kuratowskiego i Tarskiego [1931b], gdzie struktura logiczna pewnych formuł została powiązana z położeniem w hierarchii rzutowej zbiorów opisywanych przez te formuły. Y.N. Moschovakis napisał w monografii "Descriptive Set Theory" [24], że w tej "fundamentalnej pracy po raz pierwszy zostały zauważone związki między deskryptywną teorią mnogości i logiką" a H. Rogers, w klasycznym dziele "Theory of recursive functions and effective computability" [29], poświęcił metodzie opisanej w [1931b] osobną część "The Tarski-Kuratowski algorithm".

W kolejnej pracy [1931c] związanej z tym podejściem, Kuratowski ustala złożoność borelowską, lub rzutową, wielu naturalnych zbiorów pojawiających się w topologii i teorii funkcji rzeczywistych. Problematyka ta jest wciąż przedmiotem zainteresowania matematyków o różnych specjalnościach.

Istotną rolę w kształtowaniu się struktury współczesnej deskryptywnej teorii mnogości odegrała też praca Kuratowskiego [1936e], gdzie wyodrębniona została "zasada redukcji" – możliwość wpisywania w przeliczalne pokrycia przestrzeni zbiorami danej klasy przeliczalnych pokryć rozłącznych zbiorami tej klasy, występująca zarówno w hierarchii borelowskiej, jak i rzutowej. Kuratowski wskazał na ścisłe związki zasady redukcji z podstawowymi twierdzeniami o oddzielaniu w deskryptywnej teorii mnogości.

6. Niemierzalność $2^{\aleph_0}$.

Stefan Banach i Kazimierz Kuratowski udowodnili w [1929c] twierdzenie głoszące, że przy założeniu Hipotezy Continuum na rodzinie wszystkich podzbiorów prostej rzeczywistej nie można określić nietrywialnej, bezatomowej miary przeliczalnie addytywnej, zapoczątkowując tym wynikiem niezwykle ważny nurt badań w teorii mnogości (nie wiadomo, czy zdanie przeczące tezie tego twierdzenia jest niesprzeczne z aksjomatami ZFC). Okoliczności powstania tego twierdzenia opisał Kuratowski w "Notatkach do autobiografii" na str.95.

Wkrótce potem Stanisław Ulam – uczeń Kuratowskiego, w rozprawie doktorskiej (obronionej na Politechnice Lwowskiej w 1933r.) pokazał, że każda bezatomowa, przeliczalnie addytywna miara określona na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru mocy $\aleph_1$ jest trywialna i zastąpił Hipotezę Continuum w twierdzeniu Banacha-Kuratowskiego znacznie słabszą hipotezą o liczbach kardynalnych.

Bardzo owocną ideą Banacha i Kuratowskiego, na której oparli swój dowód, było określenie, przy założeniu Hipotezy Continuum, macierzy (A_{ij}) o przeliczalnie wielu wierszach i kolumnach, złożonej z podzbiorów zbioru F o mocy $2^{\aleph_0}$, której każdy wiersz jest rozbiciem F na zbiory rozłączne, a przecięcia skończonych sum zbiorów wybranych z każdego wiersza są przeliczalne (Banach i Kuratowski rozważają w tym celu zbiór F mocy $2^{\aleph_0}$ w przeliczalnej potędze liczb naturalnych $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, mający co najwyżej przeliczalne przecięcie z każdym zbiorem zwartym w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i przyjmują $A_{ij} = \{f \in F : f(i) = j\}$).

Dowód Ulama niemierzalności $\aleph_1$ opierał się na konstrukcji macierzy o przeliczalnie wielu wierszach i $\aleph_1$ kolumnach, złożonej z podzbiorów zbioru F o mocy $\aleph_1$ takiej, że zbiory w każdym wierszu są parami rozłączne, a suma zbiorów w każdej kolumnie wyczerpuje F z dokładnością do zbioru przeliczalnego.

7. Metoda KKM, miara niezwartości, twierdzenie Kuratowskiego-Ulama i selekcje mierzalne.

Duży wpływ na zastosowania twierdzenia Brouwera o punkcie stałym miała praca Knastera, Kuratowskiego i Mazurkiewicza [1929d], zawierająca nowy dowód tego twierdzenia. Głównym elementem dowodu Knastera, Kuratowskiego i Mazurkiewicza jest twierdzenie (wyprowadzone z pewnego kombinatorycznego twierdzenia E. Spernera) orzekające, że jeśli wierzchołkom $v_0, \ldots, v_n$ sympleksu Δ przyporządkowane są zbiory domknięte $A_0, \ldots, A_n$ w Δ tak, że każda ściana sympleksu rozpięta na wierzchołkach $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ jest pokryta zbiorami $A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}$, to pewien punkt z Δ należy do wszystkich zbiorów A_i.

W 1961 r., Ky Fan uogólnił to twierdzenie, wyróżniając przekształcenia $F : X \to 2^E$ przyporządkowujące punktom zbioru X w przestrzeni liniowo-topologicznej E zbiory domknięte $F(x)$ w E w taki sposób, że uwypuklenie każdego skończonego układu punktów $x_1, \ldots, x_k$ w X leży w sumie zbiorów $F(x_1), \ldots, F(x_k)$ – takie przekształcenia nazywane są w literaturze KKM-przekształceniami, na cześć autorów [1929d]. Ky Fan wywnioskował z [1929d], że jeśli jedna z wartości KKM-przekształcenia jest zwarta, to przecięcie wszystkich wartości tego przekształcenia jest niepuste. KKM-przekształcenia znalazły ważne zastosowania w różnorodnych zagadnieniach matematyki (zob. [10] i [14]).

W metrycznej teorii punktów stałych, a także w zagadnieniach przenormowania przestrzeni Banacha, bardzo użyteczna okazała się "miara niezwartości" zbiorów w przestrzeniach metrycznych, wprowadzona przez Kuratowskiego w [1930e] – kres dolny liczb δ, dla których dany zbiór można rozbić na skończenie wiele zbiorów o średnicach mniejszych niż δ (zob. [13] i [22]).

Często wykorzystywane jest też udowodnione w [1932d] twierdzenie Kuratowskiego-Ulama, będące odpowiednikiem dla kategorii Baire'a w przestrzeniach metrycznych ośrodkowych twierdzenia Fubiniego z teorii miary, oraz jego późniejsze liczne uogólnienia (zob. [26]).

Również twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego o selekcjach mierzalnych [1965a], dzięki swojej prostocie i ogólności, jest bardzo często stosowane.

Zagadnieniom selekcji mierzalnych dla multifunkcji i selektorów mierzalnych dla rozkładów przestrzeni poświęcił Kazimierz Kuratowski większość publikacji w ostatnim okresie swojej działalności naukowej.

8. Monografia "Topologie" i jej kolejne wydania.

Pierwsze wydanie “Topologie I” Kuratowskiego ukazało się w roku 1933 (trzeci tom serii Monografii Matematycznych).

Niezwykle trafny dobór tematyki, klarowność i wyważenie proporcji sprawiło, że “Topologie I” stała się wzorcem prezentacji pojęć i metod topologii mnogościowej stosowanych w teorii funkcji rzeczywistych i w analizie funkcjonalnej.

W kolejnych wydaniach, znacznie rozbudowany został materiał dotyczący przekształceń w wielościany oraz część poświęcona deskryptywnej teorii mnogości.

Wydana w 1966r. w języku angielskim przez Academic Press “Topology”, vol. I jest poszerzoną wersją czwartego wydania “Topologie I” z 1958r. (w szczególności, dodane są rozdziały o parazwartości przestrzeni metrycznych i związanych z nią twierdzeniach metryzacyjnych).

Drugi tom dzieła Kuratowskiego “Topologie II” ukazał się w 1950r. (dwudziesta pierwsza pozycja serii Monografii Matematycznych). Jak pisze we wstępie autor, wydanie tego tomu było możliwe dzięki temu, że po wybuchu wojny w roku 1939, rękopis książki udało się przesłać do Szwajcarii profesorowi Wavre z Uniwersytetu w Genewie (zob. “Notatki do autobiografii” Kuratowskiego, str. 104).

Rozdziały “Topologie II” poświęcone pojęciu spójności, teorii continuów i topologii płaszczyzny stanowią mistrzowskie podsumowanie jednego z głównych nurtów topologii mnogościowej okresu międzywojennego, do którego matematyczna szkoła warszawska wniosła wielki wkład.

W kolejnych wydaniach “Topologie II”, część poświęcona przestrzeniom euklidesowym została wzbogacona użyciem grup kohomotopii Karola Borsuka.

Drugi tom “Topology”, opublikowany przez Academic Press w 1968 jest istotnym rozszerzeniem wydania “Topologie II” z 1961r. W szczególności, pojęcie zwartości jest tu omówione w pełnej ogólności.

Dwutomowa monografia Kuratowskiego – dzieło wybitne, zaliczające się do światowej klasyki literatury matematycznej – niewątpliwie ustaliła kanon w wielu fundamentalnych dziedzinach topologii mnogościowej.