3. Dorobek naukowy Stefana Kaczmarza – książka

Kaczmarz, współpracując z H. Steinhausem, opublikował jedną monografię w 1935 r. po niemiecku, w 1951 roku ukazał się jej przedruk, również po niemiecku, a w 1958 roku jej rosyjskie tłumaczenie oraz 32 prace naukowe opublikowane w latach 1924--1939 (w tym 12 prac w Studia Mathematica). Współautorami wielu prac byli: Władysław Nikliborc (1899-1948), Hugo Steinhaus (1887-1972), Józef Marcinkiewicz (1910-1940) i Andrzej Turowicz (1909-1989).

Kaczmarz zajmował się następującymi działami matematyki:

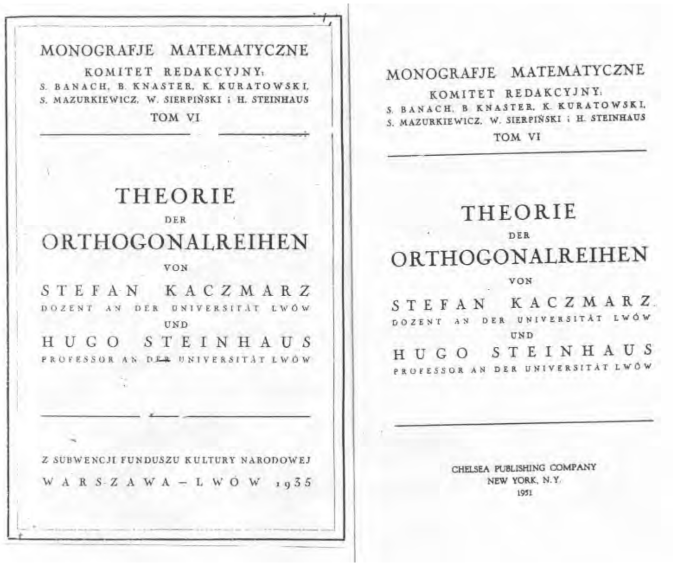
a) Szeregi ortogonalne, a zwłaszcza zagadnienia zbieżności i sumowalności prawie wszędzie.

b) Teoria funkcji rzeczywistych, w tym równania funkcyjne, dowody istnienia funkcji ciągłych wykazujących różnego typu osobliwości w każdym punkcie przedziału np. funkcjami ciągłymi nigdzie nie spełniającymi warunku Diniego, uogólniona zbieżność (tzw. N-zbieżność względem N-modularu $I_N(f) = \int_0^1 N(f(x))dx$).

c) Zastosowania matematyki. Jest on twórcą pewnej metody o przybliżonym rozwiązywaniu dużych układów równań liniowych zwanej metodą Kaczmarza lub algorytmem Kaczmarza. Badał też krzywizny drogowe i opisał pewne przybliżone obliczenia algebraiczne.

Opublikował też prace w: transformacjach całkowych, analizie funkcjonalnej, szeregach liczbowych i aksjomatyce arytmetyki.

Należał do kręgu współpracowników Stefana Banacha i był członkiem Lwowskiej Szkoły Matematycznej. Monografia Stefan Kaczmarz i Hugo Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tom VI, Warszawa-Lwów 1935, vi + 298 str., cena 5 $ (wydana po niemiecku), była dużym osiągnięciem polskiej matematyki przedwojennej. Książka jest dostępna w internecie w Wirtualnej Bibliotece Matematyki (patrz [24]).


MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS
TOM VI

THEORIE
DER
ORTHOGONALREIHEN
VON
STEFAN KACZMARZ
DOZENT AN DER UNIVERSITÄT LWÓW
UND
HUGO STEINHAUS
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LWÓW

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA – LWÓW 1935

MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS
TOM VI

THEORIE
DER
ORTHOGONALREIHEN
VON
STEFAN KACZMARZ
DOZENT AN DER UNIVERSITÄT LWÓW
UND
HUGO STEINHAUS
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LWÓW

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK, N.Y.
1951

24. *Strona tytułowa dwóch wydań książki Kaczmarza i Steinhausa*

Powstanie i znaczenie tej książki opisane jest w listach bądź recenzjach:

Bronisław Knaster napisał w liście do Kaczmarza, jako członek Komitetu Redakcyjnego *Monografii Matematycznych* (10 XI 1935, list 2 stronicowy):

> *Drogi Kolego! Mam nadzieję, że otrzymaliście w porządku egzemplarz autorski dla Was (na lepszym papierze) i że różne drobne niedociągnięcia drukarskie nie rażą Was zbytnio. Jeśli są, darujcie nam. My tu pracujemy w warunkach dość prymitywnych i mimo najlepszej woli wkradają się różne przedziwne gady do naszej roboty. Nam książka Wasza podoba się tu bardzo. Uważamy, że jest piękna. Osobiście najserdeczniej Wam winszuję jej ukończenia. Jednocześnie napisałem do Prof. Steinhausa.*
> *Zażenowany jestem Waszym miłym stosunkiem do mej skromnej współpracy. Mogę Was zapewnić, że była mi ta współpraca bardzo przyjemna, mimo, że na mnie przypadły w niej obowiązki czysto techniczne i podrzędne, a to dlatego, że czułem przez cały czas wartość dzieła i najlepszą wolę jego autorów. Pragnę też, byście nie zachowali przykrego wspomnienia o mnie. Egzemplarzy autorskich otrzymujecie łącznie 30. Z tych rozesłaliśmy 17: Auerbach, Sternbach, Zygmund, Zarankiewicz, Łomnicki, Orlicz, Saks, Whittaker, Hardy, Riesz, Carlslaw, Montel, Tonelli, Landau, Menchoff, Wiener, Rademacher oraz Wasz –razem*

= 18; pozostałe 12 posłaliśmy prof. Steinhausowi paczką. (...) Jeszcze raz łączę me najlepsze gratulacje i życzę rychłego drugiego wydania.
Serdecznie dłoń Waszą ściskam, Bronisław Knaster.

Recenzja książki napisana przez Adolfa Hammersteina (1888-1941) z Kolonii [H34]:

Monografia omawia ogólną teorię szeregów ortogonalnych jednej zmiennej rzeczywistej.

Recenzja książki napisana przez Gabor Szego (1895-1985) z St. Louis [S35]:

Teoria szeregów ortogonalnych w ostatnich 30 latach stała się popularna, zwłaszcza dzięki zastosowaniom w teorii równań całkowych i po odkryciu twierdzenia F. Riesza-Fischera. (...) Książka jest wielkim osiągnięciem i stanie się ulubioną przez koneserów i wielbicieli szeregów ortogonalnych, jak również będzie początkiem radości i użyteczności.

Recenzja książki napisana przez Adolphe Buhl-a (1878-1949) z Tuluzy [B34]:

Matematycy polscy kontynuują badania otwarte, które wydają się gigantyczne w sensie wielkiej perspektywy. W tej książce zawarta jest teoria szeregów ortogonalnych, której współczesne badania nie rosną szybciej od gloryfikowanych badań Fouriera czy Sturma-Liouvilla. (...) Ma bogatą bibliografię choć brakuje nazwiska Pana Maurice Frecheta. Mimo wszystko książka jest pierwszej klasy.

Recenzja książki napisana przez A. Zygmunda (1900-1992) [Z35]:

Książka jest sukcesem matematyki polskiej, jako praca pionierska. Jest ona bowiem pierwszym dziełem, poświęconym teorii ogólnej układów ortogonalnych. (...) Autorowie jej są w Polsce (obok D-ra Orlicza) najlepszymi znawcami tej teorii i zawdzięcza im ona szereg ważnych wyników. (...) Należy dodać, że książka zawiera szereg wyników po raz pierwszy ogłoszonych drukiem. Wiele dowodów jest uproszczeniem dotychczas znanych. Za książkę tą należy się autorom wdzięczność ze strony nauki, a w szczególności nauki polskiej.

Jerzy Neyman (1894-1981) napisał w liście do Kaczmarza [N35]:

Szanowny Kolego. Właśnie otrzymałem Waszą książkę, wspólną z Prof. Steinhausem i jestem zachwycony. Znalazłem w niej szereg rzeczy, które mi są potrzebne do rozmaitych zagadnień statystycznych i których sam nie umiałem wyprodukować. Mam jednak parę drobnych trudności, które zapewne dla Was takowymi nie będą. Byłbym więc Wam bardzo wdzięczny gdybyście mi zechcieli dopomóc. Wyjeżdżam teraz na czas pewien (do 21 I) do Paryża. (...)
Łączę uprzejme pozdrowienia i najlepsze życzenia noworoczne. Jerzy Neyman.

Władysław Orlicz napisał w Polskim Słowniku Biograficznym [O64]:

Książka Kaczmarza i Steinhausa była pierwszą w literaturze światowej monografią poświęconą ogólnej teorii szeregów ortogonalnych.

Drugie wydanie książki Kaczmarza i Steinhausa, a właściwie poprawiony przedruk pierwszego wydania książki z 1935 roku, ukazało się w 1951 roku: Stefan Kaczmarz and Hugo Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, Tom 6, Chelsea Publishing, New York 1951, viii + 296 str., Hardcover 15 $. Natomiast w 1958 roku ukazało się rosyjskie tłumaczenie tej książki tzn. S. Kačmaž i G. Steingauz, *Teoriya Ortogonal'nykh Ryadov*, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1958, 507 str., cena 17 rubli i 50 kop., gdzie dodano 50% dodatkowego materiału napisanego przez R. S. Gutera i P. L. Uljanowa z Moskwy.

Wersja rosyjska ma przed wstępem adnotację: *Monografia S. Kaczmarza i H. Steinhausa jest jedną z lepszych książek w literaturze światowej z teorii szeregów ortogonalnych.*

Recenzja rosyjskiego tłumaczenia książki napisana przez Georga G. Lorentza (1910--2006) [Math. Reviews MR0094635 (20 #1148)]:

The translators have added 50% new material to this excellent German text.

4. Dorobek naukowy Stefana Kaczmarza – prace naukowe

Kaczmarz napisał 32 prace naukowe w latach 1924-1939. Podzielimy ich omówienie zaczynając od metody Kaczmarza, który to rezultat Kaczmarza jest najbardziej cytowany w literaturze, a następnie omówimy jego dorobek w układach ortogonalnych – jego głównej problematyce zainteresowań matematycznych.

4A. Metoda (algorytm) Kaczmarza z 1937 r.

Jest to metoda znajdowania przybliżonego rozwiązania układów równań liniowych o dużej liczbie zmiennych. Kaczmarz zauważył w 1937 roku, że zagadnienie wyznaczenia rozwiązania układu równań liniowych jest równoważne zagadnieniu wyznaczania współrzędnych punktu, który leży na przecięciu hiperpłaszczyzn przedstawionych przez równania układu.

Procedura iteracyjna Kaczmarza na znalezienie przybliżonego x_1, x_2, …, x_n układu równań liniowych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

dla dużego n jest następująca:

Krok 1: Pomnożyć przez stałe tak by $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$.

Krok 2: Pierwsze przybliżenie wybrać dowolnie $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ jako zerową grupę dla następujących grup zawierających po n przybliżonych rozwiązań

$$x_1^{(k,1)}, x_2^{(k,1)}, \ldots, x_n^{(k,1)}, \ldots, x_1^{(k,n)}, x_2^{(k,n)}, \ldots, x_n^{(k,n)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

z których każda zawiera po n przybliżonych rozwiązań.

Krok 3: Definiujemy $(k + 1)$–grupę następująco:

$$x_i^{(k+1,1)} = x_i^{(k,n)} - a_{1i} \cdot L_1^{(k,n)}, x_i^{(k+1,2)} = x_i^{(k+1,1)} - a_{2i} \cdot L_2^{(k+1,1)},$$
$$\ldots, x_i^{(k+1,n)} = x_i^{(k+1,n-1)} - a_{ni} \cdot L_n^{(k+1,n-1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

do momentu, aż ciąg

$$x_1^{(r,s)}, x_2^{(r,s)}, \ldots, x_n^{(r,s)}, \quad (s = 1, 2, \ldots, n, \; r = 1, 2, \ldots)$$

jest zbieżny do x_1, x_2, …, x_n, gdzie $L_i^{(r,s)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(r,s)} - b_i$.

Metoda ta jest zbieżna dla nieosobliwych macierzy $A = (a_{ij})$. Ostatnio metoda ta jest badana w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (Kwapień-Mycielski, 2001; Haller-Szwarc, 2005).

Metoda Kaczmarza ma duże znaczenie dla inżynierów.

25. *Kaczmarz pracuje w swoim pokoju*

W. Orlicz tak napisał o metodzie Kaczmarza [O80], str, 283:

> *Sukces odniósł Stefan Kaczmarz, który zginął w pierwszych dniach wrześniowej kampanii 1939 r. W roku 1937 ogłosił notę w Biuletynie Polskiej Akademii Umiejętności na temat przybliżonego rozwiązywania dużych układów równań liniowych. Miała ona charakter prekursorski. Istnieje poważne dwutomowe dzieło, wydane pod redakcją M. F. Beckenbacha pod tytułem „Nowoczesna Matematyka dla Inżynierów" (polskie tłumaczenie wydało PWN w 1962; wydanie po angielsku New York 1956). C. B. Tomkins, autor zawartego tam artykułu „Metoda najszybszego spadku" [T56], omawiając metodę Kaczmarza, stwierdza, że stanowi ona jeden z najprostszych przykładów bardzo użytecznej metody szybkiego spadku. Wydaje mi się, że w okresie międzywojennym rachunek krakowianów Tadeusza Banachiewicza i metoda Kaczmarza były najważniejszymi polskimi osiągnięciami w zakresie analizy numerycznej.*

Jako konkretne przykłady używania metody Kaczmarza w zastosowaniach przytoczmy kilka przykładów tytułów artykułów lub odczytów używających jego metody w tytule pracy: J. Markl, *Accelerating the Kaczmarz algorithm convergence in the case of input process time correlation* (1990), W. H. Weedon, *Application of Kaczmarz's method to nonlinear inverse scattering* (1997), F. Natterer, *The Kaczmarz method in nonlinear imaging* (1999), M. Burger i B. Kaltenbacher, *Reglarizing Newton-Kaczmarz methods for nonlinear ill-posed problems* (2004), D. E. Mason, *Material surface energy and the Kaczmarz algorithm* (2004), C. Popa i R. Zdunek, *Kaczmarz extended algorithm for tomographic image reconstruction from limited-data* (2004).

Praca Kaczmarza była tak ważna, że została przetłumaczona na język angielski przez P. C. Parksa w 1993 roku i wydrukowana ponownie w angielskim czasopiśmie International Journal of Control w 1993 roku (zobacz [28]). Patrick C. Parks poprzedził to tłumaczenie artykułem *S. Kaczmarz (1895-1939)* [P93], gdzie omawia on pracę Kaczmarza z 1937 roku oraz pisze o jego życiu i dorobku naukowym.

Patrick C. Parks (19?-1995) był profesorem w Royal Military College of Science w Anglii. Zwrócił on uwagę na doniosłość algorytmu Kaczmarza i dlatego też przetłumaczył pracę Kaczmarza z 1937 roku. Wydaje się, że tłumaczenie Parksa przyczyniło się do szerszego rozpropagowania metody Kaczmarza. Parks wysłał też do druku pracę *Kaczmarz and stochastic approximation*, która miała ukazać się ze zdjęciem Kaczmarza w Artificial Neural Networks (w materiałach z konferencji w Cambridge, June 26-28, 1995), o czym pisał jeszcze do Pani Prof. Przeworskiej-Rolewicz w grudniu 1994, dziękując jej za zdjęcie Kaczmarza. Niestety, z powodu jego śmierci 16 lutego 1995 r. praca ta się nie ukazała.

W liście do Prof. Przeworskiej-Rolewicz z dnia 23 stycznia 1995 roku Parks pisał:

> *(…). It is clear from work by myself and other authors that Kaczmarz's algorithm explained in his paper of 1937 and modern modifications of it, are the only algorithms which seem fast enough for ON-LINE adjustment of weights in a neural network being used as a function approximator e.g. in on-line adaptive control applications. It is also clear that the so-called „stochastic approximation" technique of Robbins and Monro (circa 1951)[3] can be regarded also as a modification of the original Kaczmarz algorithm in which the corrections are scaled down at each step of (discrete) time. Anyway, this is the theme of my poster, which also includes some of the history of Kaczmarz, as was published in the „Int. J. Control" a year ago or so ago with your help! With best wishes for 1995. Yours sincerely, Patrick Parks.*


STEFAN KACZMARZ
Polish mathematician
Born Sambor, near Lvov, 1895
Killed in action, Poland, 1939
Docent, Jan Kazimierz University, Lvov;
Reserve Lieutenant Polish Army;
Author (with H. Steinhaus) of book:
"Theorie der Orthogonalreihen", Warsaw 1935,
2nd. edition, Chelsea, New York, 1951;
Active participant in the "Scottish Tea House"
group of mathematicians in Lvov;
Participant in course given by Professor
Norbert Wiener at Trinity College, Cambridge,
England, Spring of 1932;
Originator of "Kaczmarz's Algorithm"
for solving least mean squares (LMS)
problems, 1937.

26. *Jedna strona odczytu Patricka Parksa z 1991 roku (jak on sam napisał: S. Kaczmarz „Vagraph" that I shall show at the 1st European Control Conference, Grenoble, France on 3rd July 1991)*

[3] Autor miał na myśli pracę [RM51].

Eduard Aved'yan w książce [A95] często stosuje algorytm Kaczmarza użyteczny w rozwiązywaniu równania, a właściwie równań liniowych opisujących zachowanie się nauczyciela (zobacz [A95], strony 17-30 oraz dodatek z wynikami używania algorytmu Kaczmarza i symulacjami; swoją drogą autor również informuje na str. 17, że metoda Kaczmarza była ponownie odkryta przez J. S. Albusa w 1975 roku!). Odnotujmy, że książka Aved'yana była wydana pod redakcją J. Masona i P. C. Parksa, po ich pobycie w Moskwie w październiku 1994 roku.

W pracy Benzi [B05] pojawia się (na stronie 11 manuskryptu) znowu informacja, że metoda Kaczmarza była ponownie odkryta około roku 1970 pod nazwą *Algebraic Reconstruction Techniques* (ARTs) i autor powołuje się tutaj na pracę [GBH70].

Wiele prac omawia metodę Kaczmarza, co można prześledzić przeglądając tylko tytuły prac z jego nazwiskiem jak np. [B84], [B05], [CEG], [HS05], [HN], [HN90], [KM01], [M77], [T56].

Metoda Kaczmarza trafiła też już do podręczników akademickich i można ją znaleźć np. w podręczniku Anton-Rorres [AR94, str. 690-693], przy rozważniu tomografii komputerowej w rozdziale 11.13, gdzie pojawia się metoda Kaczmarza do przybliżonego rozwiązywania układów równań liniowych z większą ilością równań niż zmiennych.

4B. Układy ortogonalne

Układy ortogonalne były główną dziedziną badań naukowych Kaczmarza. Poświęcił jej 18 prac: [3]-[6], [8]-[13], [18], [21]-[23], [25]-[27], [29] i książkę [24]. Omówimy pewne ważne osiągnięcia kolejno.

4B1. Układ Walsha-Kaczmarza (1929)

Tak zwane układy Walsha i Walsha-Paley'a na [0, 1] otrzymuje się jako iloczyn funkcji Rademachera ustawionych w różnym porządku. W 1929 r. Kaczmarz pierwszy zauważył, że układ funkcji Walsha może być wyrażony jako pewne proste kombinacje układu Haara. Taki układ uporządkowany w pewien sposób otrzymał w 1948 roku nazwę *układu Walsha-Kaczmarza*. Nazwę tę wprowadził w 1948 r. A. A. Shneider [S48] (patrz również [SWS], str. 2 i 511, [BR] i [GES]).

Stąd i ze znanych własności układu Haara wynikają pewne wnioski dla układu Walsha, np. jego zupełność oraz to, że jeżeli $f \in L^p, p \geq 1$ a p_n są sumami częściowymi rozwinięcia f według układu Walsha, to $\| f - p_{2^n} \| \to 0$ oraz $p_{2^n}(x) \to f(x)$ prawie wszędzie.

4B2. Zbieżność prawie wszędzie

Dla dowolnego układu ortogonalnego $\{\phi_n\}$ na $[a, b]$ twierdzenie Riesza-Fischera stwierdza, że dla dowolnego ciągu $(a_n) \in l^2$ istnieje funkcja $f \in L^2[a, b]$ taka, że jej współczynniki $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$ względem tego układu spełniają

$$\lim_{N\to\infty} \| s_N - f \| = 0, \quad \text{gdzie} \quad s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x).$$

Zatem pewien podciąg s_{N_k} jest zbieżny prawie wszędzie na [*a*, *b*]. Stąd też bierze się niełatwa problematyka istnienia ciągu *w*(*n*) $\nearrow \infty$ by ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w(n)$ wynikała zbieżność prawie wszędzie na [*a*, *b*] szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ przy dowolnym układzie ortogonalnym (φ_n). Ciąg liczb {*w*(*n*)} dający pozytywną odpowiedź nazywa się *mnożnikiem Weyla*.

Twierdzenie Mieńszowa-Rademachera (H. Rademacher 1922, D. Mieńszow 1923) stwierdza, że ciąg $w(n) = (\log n)^2$ jest mnożnikiem Weyla i żaden ciąg słabiej rosnący do ∞ niż $(\log n)^2$ nie daje mnożników Weyla dla dowolnego układu ortogonalnego. Trudną konstrukcję Mieńszowa częściowo uprościł Kaczmarz w [23].

Analogicznie można się pytać, w miejsce zbieżności prawie wszędzie, o sumowalność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ prawie wszędzie w sensie pewnej metody sumowalności. Następujący rezultat uzyskali niezależnie Kaczmarz [5] i Mieńszow.

Twierdzenie Kaczmarza-Mieńszowa (1927). *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\ln \ln n)^2$ *jest zbieżny, to szereg ortogonalny* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *jest C* (0,1) *– sumowalny prawie wszędzie tzn. sumy* $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)$ *są zbieżne prawie wszędzie na* [*a*, *b*].

Kluczową rolę przy dowodzie tego twierdzenia odgrywa następujący lemat, udowodniony przez Kaczmarza w 1925 roku:

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *jest* $(C,1)$ *– sumowalny prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy podciąg* $S_{2^n}(x)$ *jest zbieżny prawie wszędzie.*

Lemat ten odgrywa też istotną rolę przy dowodzie twierdzenia Kaczmarza o związku między metodą sumowalności (*C*,1) i ważną metodą sumowalności Abela. Przypomnijmy, że szereg liczbowy $\sum c_n$ jest sumowalny metodą Abela (metodą *A*) do granicy *s*, jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \to s$ gdy $r \to 1^-$. Każdy szereg sumowalny $(C,1)$ jest *A*-sumowalny ale niekoniecznie odwrotnie tzn. istnieją szeregi *A*-sumowalne, które nie są sumowalne (*C*,1).

W 1925 roku Kaczmarz [3] udowodnił też zaskakujące twierdzenie:

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ *i szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *jest prawie wszędzie sumowalny metodą Abela, to jest prawie wszędzie* (*C*,1) *– sumowalny (do tej samej granicy).*

W pierwszym uogólnieniu tego twierdzenia Kaczmarza zastąpiono średnie (*C*,1) przez średnie Cesaro (C, α), $\alpha > 0$, co zostało udowodnione przez Zygmunda [Z26], [Z27] i Kaczmarza [8]. Te idee Kaczmarza i Zygmunda o równoważności różnych metod sumowalności w sensie *prawie wszędzie* były zauważone przez Steina w [S82]. U Kaczmarza i Zygmunda pojawia się też po raz pierwszy s*quare function*, a mianowicie

$$K(f) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} n |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{z} \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

i wykazują podstawową L^2 – nierówność

$$\| K(f) \|_{L^2} \le C \| f \|_{L^2} .$$

Dokładny opis tego dowodu podaje Stein [S82, str. 361], a na początku tego artykułu wręcz pisze:

> *It appears that square functions arose first in an explicit form in a beatiful theorem of Kaczmarz and Zygmund dealing with the almost everywhere summability of orthogonal expansions. The theorem was proved in 1926 as the culmination of several papers each had written at about that time. The theorem itself was an outgrowth of what certainly was one of the main preoccupations of analysts at that time, namely the question of convergence of Fourier series.*

Omawiając dotąd problematykę zbieżności założenia dotyczyły współczynników (a_n), a rezultaty były prawdziwe dla wszystkich układów ortogonalnych. Można jednak badać innego rodzaju kryteria zbieżności szeregów ortogonalnych robiąc odpowiednie założenia o tzw. funkcjach Lebesgue'a. Zacznijmy od rezultatów, które były obiektem zainteresowań Kaczmarza. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)w(n)<\infty$ dla $w(n) = \log n$, to szereg Fouriera

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

jest zbieżny prawie wszędzie. Wykazali to Kołmogorow-Silvestrow w 1924 r. (słabszą wersję) i w 1926 r. powyższą oraz niezależnie Plessner w 1925 r., Kaczmarz w 1927 r. (na konferencji) i 1929 r. (praca w Studia Math.) uogólnił to twierdzenie z szeregów trygonometrycznych na dowolne układy ortonormalne i na zbieżność prawie wszędzie na pewnym zbiorze; wtedy za wagę $w(n)$ trzeba wziąć monotoniczną majorantę funkcji Lebesgue'a na tym zbiorze.

Wynik Kołmogorowa-Silvestrowa i Plessnera nie ma dzisiaj żadnego znaczenia, bo sławne twierdzenie Carlesona zapewnia zbieżność prawie wszędzie szeregu Fouriera już przy warunku $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty$. Jednakże uogólnienie znalezione przez Kaczmarza jest nadal obiektem zainteresowań.

Jeżeli $\Phi = (\varphi_n)$ jest układem ortogonalnym w $L^2[a, b]$, tzn.

$$\int_a^b\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)dx=0 \quad \text{dla} \quad m\neq n \quad \text{i} \quad \int_a^b\varphi_n(x)^2\,dx=C_n<\infty,$$

to sumy częściowe rozwinięcia $f\in L^2[a, b]$ można napisać w postaci

$$S_n(f,x)=\int_a^b f(x)\,D_n(x,t)dx \quad \text{gdzie} \quad D_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\varphi_i(x)$$

jest jądrem Dirichleta i zgodnie z terminologią Rademachera funkcje

$$L_n(x)=L_n(\Phi,x)=\int_a^b\left|D_n(x,t)\right|dt$$

nazywamy funkcjami Lebesgue'a danego układu Φ. Kaczmarz udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie Kaczmarza (1929). *Jeżeli zachodzi warunek*

$$L_n(x)\leq w(n) \quad \text{dla} \quad x\in A\subset[a,b], \quad n=1,2,\ldots, \quad \text{gdzie} \quad w(n)\uparrow\infty,$$

to dla każdego ciągu $\{c_k\}$ *prawdziwa jest nierówność*

$$\left(\int_A\max_{1\leq k\leq n}w(k)^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i(x)\right|dx\right)^2\leq 4\sum_{k=1}^{n}c_k^2 mA.$$

W szczególności, gdy dla prawie wszystkich $x \in A \subset [a,b], L_n(x) \le Cw(n), n = 1, 2, \ldots,$ *gdzie* $w(1) < w(2) < \ldots$*, to ze zbieżności szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n)$ *wynika zbieżność prawie wszędzie szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$.

Rezultat Kaczmarza jest prezentowany w znakomitych monografiach o szeregach ortogonalnych: monografii Olevskiego [O75, str. 100 i nierówność (4) oraz Twierdzenie 1] oraz Kashina-Saakyana [KS84, Twierdzenie 4 z dowodem, strony 303-307].

4B3. 86 problem Banacha z Księgi Szkockiej

Wiadomo, że istnieją układy ortogonalne zupełne w $L^\infty[0, 1]$, a niezupełne w $L^p[0, 1]$ dla każdego $1 \le p < \infty$. Metodę budowania takich układów podali S. Banach i G. Fichtenholz. Wynika stąd, że istnieją układy ortogonalne, złożone z funkcji ograniczonych, nie dające się uzupełnić w $L^p[0, 1]$ funkcjami ograniczonymi. W związku z tym Banach postawił pytanie, czy istnieją układy ortogonalne i unormowane, wspólnie ograniczone prawie wszędzie, nie dające się uzupełnić w L^2 (lub w dowolnej L^p, funkcjami wspólnie ograniczonymi prawie wszędzie. Inaczej można też zapytać, tak jak brzmi 86 problem Banacha z Księgi Szkockiej:

Czy jest możliwe z dowolnego niezupełnego układu ortogonalnego jednostajnie ograniczonych funkcji otrzymać układ zupełny przez dodanie pewnych jednostajnie ograniczonych funkcji?

W 1936 r. Kaczmarz pokazał, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna.

Niech $\{\varphi_n\}$ będzie układem ortogonalnym, unormowanym, zupełnym w $L^1[0, 1]$ wspólnie ograniczonym np. układem trygonometrycznym. Weźmy dowolną funkcję $f \in L^2[0,1] \setminus L^\infty[0,1]$. Uporządkujmy $\{\varphi_n\}$ tak by współczynniki $a_n = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$ miały własność, że $|a_1| \ge |a_2| \ge |a_3| \ge \ldots$. Wtedy układ

$$g_n(x) = a_n\varphi_1(x) - a_1\varphi_n(x)$$

jest wspólnie ograniczony, zupełny w $L^\infty[0,1]$ i niezupełny w $L^2[0,1]$. Jeżeli teraz zortogonalizujemy $\{g_n\}$ to otrzymamy układ ortogonalny, unormowany $\{\phi_n\}$, który jest zupełny w $L^\infty[0,1]$, ale niezupełny w $L^2[0,1]$. Oczywiście łatwo to uogólnić na dowolne $L^p[0,1]$. Ponadto, tak samo można wykazać, że istnieje układ ortogonalny, unormowany, wspólnie ograniczony, zupełny w $L^p[0,1]$, $p > 2$, nie dający się uzupełnić w $L^q[0,1]$ dla $q <$ p. Wystarczy obrać jako funkcję $f \in L^q \setminus L^p$. Modyfikując można to też pokazać dla $1 < p \le 2$ (patrz Kaczmarz [26], str. 435-436).

4B4. Multiplikatory (1933, 1936, 1938)

Mając dany układ ortogonalny $\{\varphi_n\}$ i dwie klasy funkcji X, Y to ciąg liczbowy (λ_n) nazywamy multiplikatorem klasy (X, Y), jeżeli dla dowolnej funkcji $f \in X$ istnieje funkcja $g \in Y$ taka, że

$$\int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx = \lambda_n \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Prace Kaczmarza z lat 1933, 1936 i 1938 poświęcone są badaniom multiplikatorów różnych typowych klas funkcyjnych, takich jak L^p, L^∞, $C[a,b]$, $V[a,b]$. W [25] omawiana jest sprawa tzw. *osobliwości*, którą można tak scharakteryzować: dana jest pewna klasa funkcji X, pewna klasa M ciągów liczbowych i pewien układ ortogonalny (ϕ_n). Czy istnieje funkcja w X, dla której ciąg współczynników (względem ϕ_n) nie należy do M (osobliwość typu Carlemana)? Czy istnieje w M ciąg, który nie jest ciągiem współczynników żadnej funkcji z X (osobliwość typu Hardy'ego-Littlewooda)?

4B5. 130 problem Kaczmarza z Księgi Szkockiej

Kaczmarz bywał w Kawiarni Szkockiej i wpisał nawet jeden problem do Księgi Szkockiej (problem 130):

Niech $\{f_n(t)\}$ będzie systemem jednostajnie ograniczonych, ortogonalnych i lakunarnych funkcji tzn. dla $p > 2$ istnieje stała $M_p > 0$ taka, że

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \le M_p \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2}$$

Czy istnieje stała $\gamma > 0$ taka, że dla dowolnego skończonego układu liczb c_1, c_2, ..., c_n mamy

$$\max_{t\in[0,1]} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right| \ge \gamma \sum_{k=1}^{n} |c_k| ?$$

Jest to więc pytanie, czy powyższy zbiór funkcji $\{f_n\}$ jest zbiorem Sidona. Przykładowo funkcje Rademachera tworzą zbiór Sidona.

4C. Całki typu Diniego

Najprostsza całka, znana z kryterium Diniego zbieżności szeregów Fouriera, to

$$\int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(t)|}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{|f(x+t)-f(t)|}{t}\, dt. \qquad (1)$$

Pytanie dotyczy skończoności tej całki, gdy f jest funkcją ciągłą lub istnienia powyższej całki bez wartości bezwzględnej w liczniku. Plessner (1923) i Besicovitch (1923) wykazali, że całka taka istnieje prawie wszędzie. Z drugiej, strony Titchmarsh (1925) udowodnił, że całka

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)}\, dt \qquad (2)$$

może być rozbieżna dla prawie wszystkich x, gdy $\frac{\varphi(t)}{t} \to 0$ przy $t \to 0$.

Kaczmarz (1931) wykazał, że jeżeli φ jest dodatnią, ciągłą, rosnącą funkcją i całka $\int_0^1 \frac{t}{\varphi(t)}\, dt$ jest rozbieżna, to istnieje funkcja ciągła f o okresie 1, dla której całka (2) i całka

$$\int_0^1 \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)}\, dt \qquad (3)$$

równa się ∞ dla wszystkich x. Zbiór takich funkcji jest II kategorii Baire'a w przestrzeni funkcji ciągłych.

Kaczmarz (1932) wykazał też, że jeżeli φ jest dodatnią, funkcją ciągłą rosnącą i $\frac{\varphi(t)}{t} \to 0$ gdy $t \to 0$, to istnieje funkcja ciągła f o okresie 1, dla której całka (2) jest rozbieżna dla wszystkich x. Zbiór takich funkcji jest II kategorii Baire'a w przestrzeni funkcji ciągłych.

W książce Bari ([B64], str. 66-68) podany został przykład konstrukcji Kaczmarza z 1931 roku funkcji ciągłej f takiej, że $\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)}\right| dt = +\infty$ dla każdej wartości x oraz dalej (na str. 73) kolejny przykład Kaczmarza o istnieniu funkcji, dla których w każdej punkcie x mamy

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)-f(t)}{\varphi(t)}\right| dt = +\infty$$

lub

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(t)}{\varphi(t)}\right| dt = +\infty$$

i w żadnym punkcie powyższe całki bez wartości bezwzględnych nie istnieją.

4D. Problem Mazura-Ulama z Księgi Szkockiej nr 109

Kaczmarz-Turowicz (1939) podali rozwiązanie problemu Mazura-Ulama sformułowanego w 1938 r. Twierdzenie z tej pracy (patrz [O85, str. 162] i [GP78, str. 16]):

Dane są funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ rzeczywiste, całkowalne, skończone na $[a, b]$, gdzie $-\infty \le a \le b \le \infty$; gdy $b = \infty$, to rozważamy, zamiast przedziału domkniętego, odpowiedni przedział otwarty (lub otwarty z jednej strony). Tworzymy zbiór Z funkcji postaci

$$f(x) = R(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

gdzie n jest liczbą naturalną zależną od f, a $R = R_f = R(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jest funkcją wymierną n zmiennych o współczynnikach rzeczywistych (należy to rozumieć tak, że funkcja f jest zdefiniowana dla wszystkich $x \in [a, b]$, dla których mianownik w $R(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ nie równa się zeru). Wówczas dla każdego przedziału $[c, d]$, takiego że $a \le c < d \le b$, $-\infty < c, d < \infty$ istnieje taka funkcja f_0 skończona i całkowalna w $[c, d]$, należąca do Z, że

$$F(x) = \int_c^x f_0(t)dt$$

nie należy do Z.

Można by powiedzieć, że w pewnym sensie całki nieoznaczone pewnych funkcji z Z są *niewymierne* albo, że operacja wyszukiwania funkcji pierwotnych dla funkcji z bardzo naturalnej klasy wyprowadza zawsze poza tę klasę.

Rezultat był cytowany w znanej książce Ulama ([U60], str. 80).

4E. Odwzorowanie Kaczmarza (1933)

Odwzorowanie Kaczmarza między przestrzeniami Orlicza $K_{MN} : L^M \to L^N$ dane jest wzorem

$$K_{MN}(x) = N^{-1}[M(|x|)] \operatorname{sgn} x$$

jako uogólnienie odwzorowania Mazura $M_{p,q}: L^p \to L^q$ *o wzorze* $M_{p,q}(x) = |x|^{p/q}\mathrm{sgn}x$.

Kaczmarz udowodnił, że jeśli $M(2u) \leq CM(u)$ dla wszystkich $u > 0$, to odwzorowanie Kaczmarza $K_M : L^1 \to L^M$, gdzie

$$K_M(x) = M^{-1}[|x|]\mathrm{sgn}\, x$$

jest ciągłe z ciągłym odwzorowaniem odwrotnym $K_{M^{-1}} : L^M \to L^1$, danym wzorem

$$K_{M^{-1}}(y) = M[|y|]\mathrm{sgn}\, y,$$

a zatem przestrzeń Orlicza L^M jest homeomorficzna z L^1.

Mazur wykazał w 1929 roku, że przestrzeń L^p jest homeomorficzna z przestrzenią L^1 i rezultat Kaczmarza uogólniał wynik Mazura dla L^p na ośrodkowe przestrzenie Orlicza L^M.

Odwzorowanie Mazura $M_{p,q}$ jest jednostajnym homeomorfizmem między sferami jednostkowymi takim, że $M_{p,q}^{-1} = M_{q,p}$ i $M_{p,q}$ jest odwzorowaniem Lipschitza na sferze jednostkowej gdy $p \geq q$ oraz $\frac{p}{q}$ – Höldera gdy $p \leq q$. Uogólnienie tych rezultatów na przestrzenie Orlicza badał w 2005 roku Delpech [D05], oczywiście dla odwzorowania Kaczmarza K_{MN}.

4F. Równania funkcyjne (1924)

W równaniach funkcyjnych Kaczmarz wykazał w 1924 r., że *dla danej funkcji* ϕ *mierzalne rozwiązania równania funkcyjnego*

$$f(x) + f(x+y) = \phi(y) f(x + y/2) \tag{4}$$

określone na $(-\infty, +\infty)$ *są ciągłe, oraz są liniowymi kombinacjami funkcji*

cos kx, sin kx, cosh kx, sinh kx, *gdzie liczba k zależy od* ϕ.

Najpierw Kaczmarz zauważył, że równoważnym równaniem do (4) jest równanie

$$f(x+y) + f(x-y) = \phi(2y) f(x). \tag{5}$$

Ważna obserwacja Kaczmarza tutaj to fakt, że mierzalne rozwiązanie tego równania musi być ciągłe ([2], str. 125).

Następnie Kaczmarz, przy pomocy aparatu funkcji rzeczywistych, stwierdził, że rozwiązanie spełnia równość

$$f''(x) = kf(x), \ k = 2\phi''(0)f(x),$$

(6)

a zatem ogólne rozwiązania tego równania to

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{k}x) + C_2 \sin(\sqrt{k}x) \quad \text{dla} \quad k > 0$$

lub

$$f(x) = C_1 \cosh(\sqrt{|k|}x) + C_2 \sinh(\sqrt{|k|}x)$$

lub

$$f(x) = C_1 + C_2 x \quad \text{dla} \quad k = 2f''(0) = 0.$$

W szczególności, ogólnym rozwiązaniem równania

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 f(x) \cos y$$

jest $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Aczel podał w [A56] prosty dowód tego ostatniego przypadku.

4G. N-zbieżność (1928)

S. Kaczmarz and L. Nikliborc w 1928 roku badali N-zbieżność. Niech $N : R \to R$ będzie *N-funkcją* tzn. funkcją ciągłą, $N(0) = 0$, $N(u) > 0$ dla $|u| > 0$ i istnieją stałe $a > 0$, $b > 0$ takie, że dla $|u| > a$ mamy $N(u) > b$.

Nazwa *funkcja (N)* lub *N-funkcja* pojawiła się tutaj, ponieważ pierwszym, który wprowadził tę zbieżność i ją badał był Paul Noaillon.

Ciąg funkcji (f_n) jest *N-zbieżny* lub *zbieżny w sensie Noaillona* do f na $[0, 1]$, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[f_n(x) - f(x)]\,dx = 0$$

Kaczmarz-Nikliborc udowodnili, że jeśli

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_0^1 N[f_m(x) - f_n(x)]\,dx = 0,$$

to istnieje funkcja f na $[0, 1]$ taka, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[f(x) - f_n(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[f_n(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

Ponadto, gdy N spełnia dodatkowo $N(u + v) \leq C\,[N(u) + N(v)]$ dla pewnej stałej $C > 0$ i wszystkich $u, v \in R$, to również

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 N[f_n(x)]\,dx = \int_0^1 N[f(x)]\,dx.$$

Funkcje z takim dodatkowym założeniem nazwane zostały N_1-funkcjami. To ostatnie twierdzenie jest uogólnieniem twierdzenia F. Riesza, znanego dla przestrzeni L^p z $p \geq 1$, którego zresztą oni nie znali.

Przypomnijmy, że praca Birnbauma-Orlicza [BO31], badająca też taką zbieżność, ukazała się w 1931 roku, a praca Orlicza z jego przestrzeniami i N-zbieżnością w 1932 roku. Byli więc oni blisko odkrycia przestrzeni Orlicza, ale takowe pojawiły się po raz pierwszy dopiero w pracy Orlicza z 1932 roku. W pracy Birnbauma-Orlicza nie ma przestrzeni. Zatem przestrzenie Orlicza to przestrzenie Orlicza, a NIE Birnbauma--Orlicza, jak niektórzy próbują zaanonsować bez solidnego przebadania prac.

4H. Aksjomatyka liczb naturalnych u Kaczmarza

Erhard Schmidt podał charakteryzację liczb naturalnych w swoich wykładach w 1920 roku, ale nigdy nie opublikował, o czym pisze Rohrbach w [R51]. Kaczmarz, zupełnie niezależnie, podał w 1932 r. prawie tę samą aksjomatykę. Schmidt zdefiniował zbiór liczb naturalnych jako niepusty uporządkowany zbiór $\mathscr{N}$ taki, że

1. Każdy niepusty podzbiór $\mathscr{N}$ ma element pierwszy.
2. Każdy element $\mathscr{N}$ z wyjątkiem pierwszego ma bezpośredni poprzednik w $\mathscr{N}$.
3. Zbiór $\mathscr{N}$ nie ma elementu ostatniego.

Rohrbach [R51] wykazał, że ta definicja jest równoważna z aksjomatami Dedekinda-

-Peano. Wspomnijmy, że Ludwig Neder [N31] podał w 1931 roku zbiór niezależnych aksjomatów dających liczby naturalne. Jego zbiór upraszcza konstrukcję Peano i pierwotnymi pojęciami są liczba, równość i relacja mniejszości <. Podobnie Kaczmarz [16] w 1932 roku podał te aksjomaty w postaci zawierającej tylko relację <. Kaczmarz poprawił konstrukcję Boehma liczb naturalnych z 1911 roku, którego zbiór aksjomatów nie był wystarczający dla charakteryzacji tych liczb. Kaczmarz udowodnił też niezależność tych aksjomatów. Niestety ta prosta aksjomatyzacja liczb naturalnych nie jest znana szerszemu ogółowi.

4l. Inne rezultaty Kaczmarza

Wybranych zostało luźno kilka rezultatów, o których nie było mowy dotychczas. Kilka nierówności Kaczmarza, jeden rezultat z transformacji całkowych, pewien z teorii szeregów w przestrzeniach Banacha i kończy to wynik z geometrii.

Mamy więc *nierówność Kaczmarza* z [13]: dla $f \in L^p[0,1]$ z $1 < p \leq \infty$ zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \tfrac{3p-2}{2p-2}\left(\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} c_n r_n(x)\Big|^p \, dx\right),$$

gdzie r_n są funkcjami Rademachera (porównaj Sikorski [S59], str. 142).

Nierówności Kaczmarza-Steinhausa ([KS], str. 287-288): Jeżeli $2 < p < \infty$ to istnieje stała $C = C(p)$ taka, że zachodzi nierówność

$$|1+x|^p \leq 1 + px + \sum_{k=2}^{[p]} \binom{p}{k} x^k + C|x|^p \tag{7}$$

dla wszystkich $x \in R$. Konsekwencją tej nierówności liczbowej jest następujące oszacowanie całek: Jeżeli $2 < p < \infty$ i f, $g \in L^p[a, b]$ to istnieją stałe C, D zależne tylko od p takie, że zachodzi oszacowanie

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \, dx \leq \int_a^b |f(x)|^p dx + p\int_a^b |f(x)|^{p-2} f(x)g(x)dx$$
$$+ C\int_a^b |g(x)|^p dx + D\sum_{k=2}^{[p]} \int_a^b |f(x)|^{p-1} |g(x)|^k \, dx.$$

Nierówności te są cytowane pod taką właśnie nazwą w książkach [MPF], str. 66 i [B98], str. 144.

W 1933 r. Watson [W33] wykazał następujące twierdzenie o transformacjach całkowych: Niech funkcja $k : R_+ \to R_+$ spełnia równość

$$\int_0^\infty \frac{k(xy)k(zy)}{y^2} dy = \min(x,z) \quad \text{dla wszystkich} \quad x, z > 0. \tag{8}$$

Warunek ten jest konieczny i dostateczny by dla dowolnej $f \in L^2(R_+)$ istniała $g \in L^2(R_+)$ taka, że mamy równości prawie wszędzie

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k(xy)}{y} f(y)dy \quad \text{i} \quad f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k(xy)}{y} g(y)dy.$$

W tym samym roku Kaczmarz [19] uogólnił twierdzenie Watsona na parę funkcji k i h, znajdując trzy warunki, na te funkcje w miejsce jednego (8), by zachodziło podobne twierdzenie o transformacjach całkowych.

Kaczmarz [14] wykazał następujące rezultaty dla ciągów o wartościach w przestrzeniach Banacha $X = (X, \|\cdot\|)$:

A. Jeżeli średnie arytmetyczne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ są ograniczone dla dowolnego monotonicznego ciągu liczbowego $\{\lambda_n\}$ zbieżnego do 0, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest absolutnie ograniczony.

B. Jeżeli średnie arytmetyczne szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k$ są ograniczone dla dowolnego wypukłego ciągu liczbowego $\{\lambda_n\}$ zbieżnego do 0, to szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest ograniczony.

Przypomnijmy, że ciąg liczbowy $\{\lambda_n\}$ jest wypukły, gdy

$$\Delta^2 \lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n+2} - 2\lambda_{n+1} \geq 0.$$

Wyniki Kaczmarza uogólniają rezultat S. Szidona z 1921 r. udowodniony dla szeregów liczbowych rzeczywistych bądź zespolonych. Rezultaty Kaczmarza były też z kolei uogólniane przez Orlicza [O36] na k-monotoniczne malejące ciągi $\{\lambda_n\}$, tzn. ciągi spełniające $\Delta^i \lambda_n \geq 0$ dla i = 0, 1, ..., k i wszystkich $n \in N$ oraz przez Turana [T47] na ciągi monotoniczne rzędu k tzn. spełniające $(-1)^i \Delta^i \lambda_n \geq 0$ dla i = 0, 1, ..., k i wszystkich $n \in N$. Wszystkie te rezultaty, włączając w to wynik Kaczmarza, były użyteczne w dowodach sumowalności szeregów ortogonalnych.

W 1920 roku Kurt Reidemeister i w 1933 roku Kaczmarz (dowód nie został opublikowany) udowodnili twierdzenie dotyczące stałej szerokości zbioru. Zbiór ma stałą szerokość, jeżeli odległość każdych dwóch podpierających równoległych jest stała.

Twierdzenie (Reidemeister-Kaczmarz). *Zbiór wypukły i domknięty ma stałą szerokość, wtedy i tylko wtedy, gdy dodanie do niego punktu nie zwiększa jego średnicy.*

W 1933 roku Marek Kac [K33] podał prosty dowód tego twierdzenia.

4J. Kaczmarz i historia matematyki

Kaczmarz interesował się historią matematyki i zbierał materiały z Jadwigą Dianni (1886-1981). Miał nawet na UJK kurs *Zarys historii matematyki*.

Po otrzymaniu korekty artykułu o Kaczmarzu 29 marca 1965 roku Orlicz napisał do Redakcji Polskiego Słownika Biograficznego:

> *Skreślono moją uwagę, że Kaczmarz był autorem prac z zakresu matematyki teoretycznej i stosowanej. Kto zna historię matematyki okresu międzywojennego u nas, wie, że tylko kilku matematyków uprawiało w tym czasie „zastosowania” i, że należą się specjalne wyrazy uznania matematykom, którzy już wówczas widzieli potrzebę badań nie tylko teoretycznych. Redakcja dołożyła natomiast kompletnie nieistotną wzmiankę, że Stefan Kaczmarz zamierzał prowadzić wykłady z historii matematyki. Po co to? Czy inne jego zamiary np. jego i moje prace wstępne nad książką matematyczną dla szkół wojskowych należało też odnotować?*